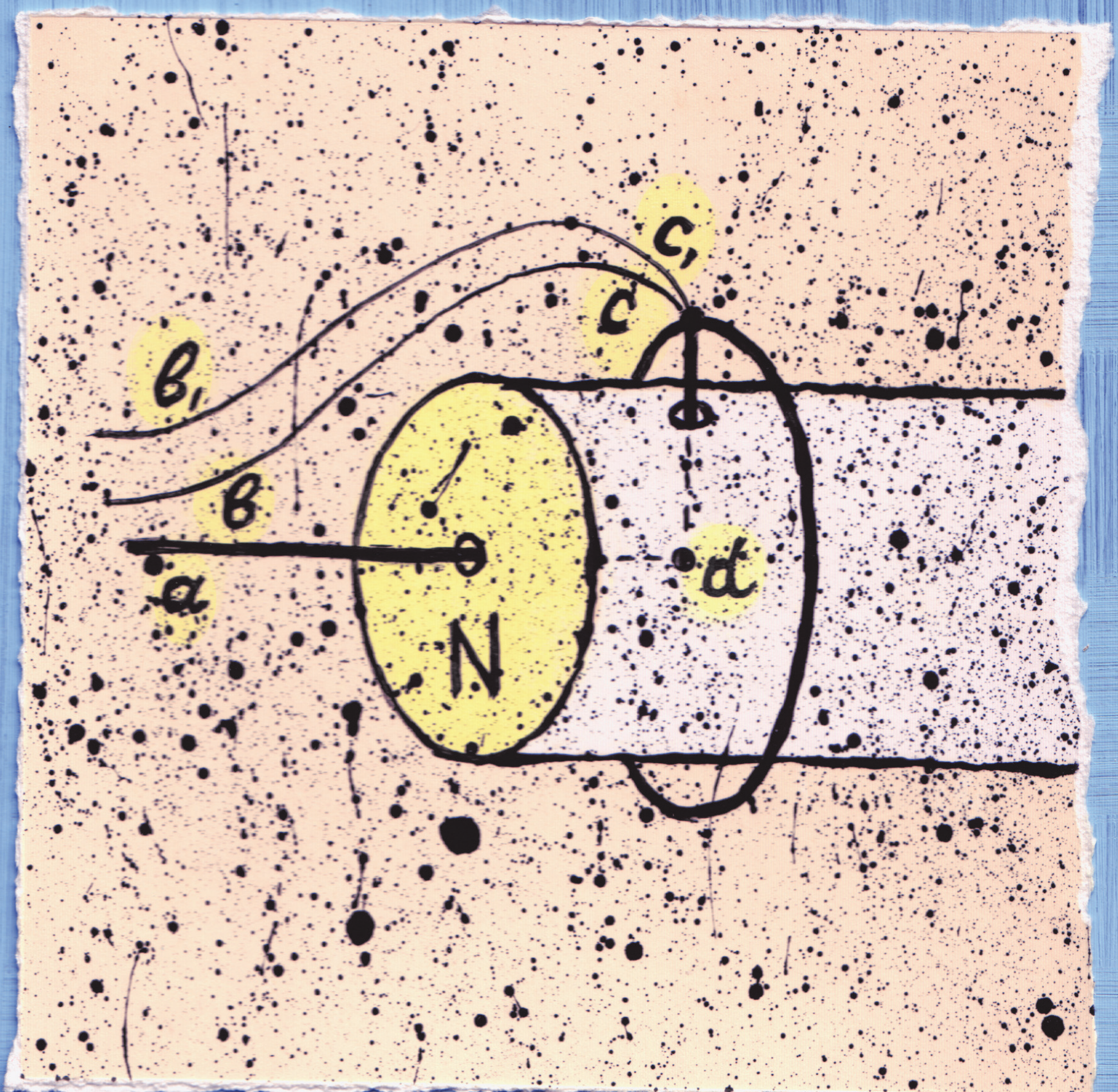
ISSN 0130-2221
ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ 2012 · №1

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



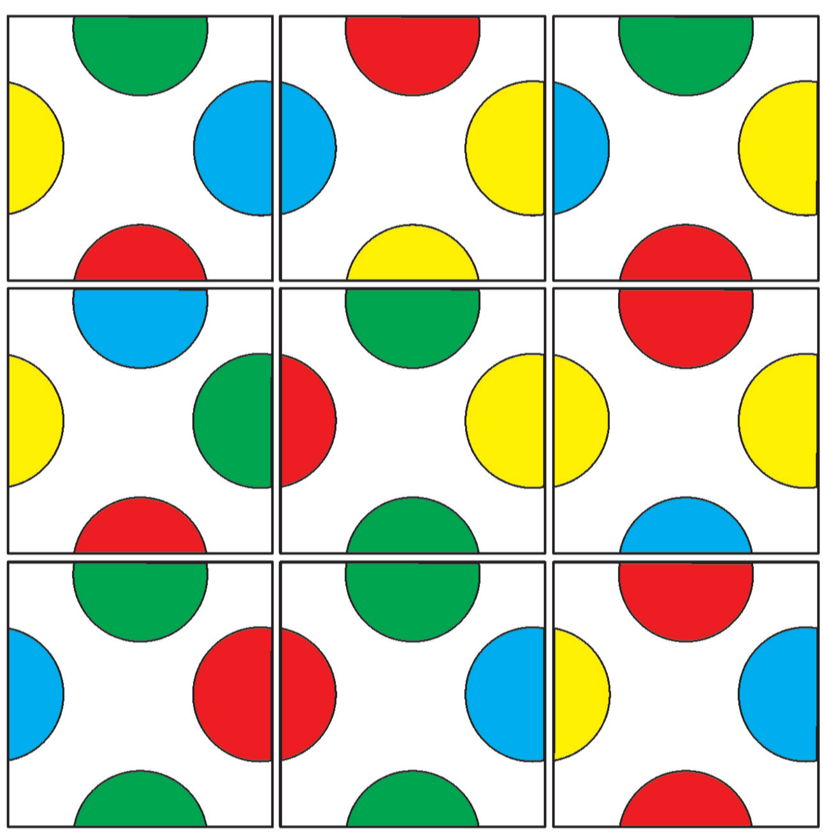
ЗАБАВНЫЕ МЯЧИ

Вы сможете сами легко изготовить эту головоломку за несколько минут. Из куска картона вырежьте девять одинаковых квадратов, а затем на каждом из них нарисуйте и раскрасьте соответствующими цветами по четыре сегмента круга, как показано на рисунке.

Очевидно, есть два типа отличающихся по форме сегментов. Один – чуть больше половины круга, а другой – чуть меньше. Сегменты разных типов, приложенные друг к другу по хорде, образуют круг.

Требуется из этих девяти квадратов составить большой квадрат так, чтобы внутри него все круги получились целыми и одноцветными. Понятно, что элементы головоломки можно поворачивать как угодно.

(Продолжение – на странице 25 внутри журнала)



КВАНТ ЯНВАРЬ ФЕВРАЛЬ 2012 № 1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Майкл Фарадей и рождение физики поля

Ю.МЕНЦИН

22 СЕНТЯБРЯ 2011 ГОДА ИСПОЛНИЛОСЬ 220 лет со дня рождения Майкла Фарадея (1791–1867) – английского физика-экспериментатора, который ввел в науку понятие «поле» и заложил основы концепции о физической реальности электрических и магнитных полей. В наши дни понятие поля известно любому старшекласснику. Начальные сведения об электрических и магнитных полях и способах их описания при помощи силовых линий, напряженностей, потенциалов и т.п. давно вошли в школьные учебники по физике. В этих же учебниках можно прочитать о том, что поле – это особая форма материи, принципиально отличная от вещества. Но вот с объяснением того, в чем именно состоит эта «особость», возникают серьезные трудности. Естественно, винить в этом авторов учебников нельзя. Ведь если поле не сводимо к каким-то другим, более простым сущностям, то тут и объяснять нечего. Надо просто принять физическую реальность поля как экспериментально установленный факт и научиться работать с уравнениями, описывающими поведение этого объекта. К этому, например, призывает в своих «Лекциях»[1] Ричард Фейнман, отметив, что ученые долгое время пытались объяснить электромагнитное поле при помощи различных механических моделей, но потом оставили эту затею и сочли, что физический смысл имеет лишь описывающая поле система знаменитых уравнений Максвелла.

Майкл Фарадей

Означает ли сказанное, что мы должны полностью отказаться от попыток понять, что такое поле? Думается, что существенную помощь в ответе на этот вопрос может оказать знакомство с «Экспериментальными исследованиями по электричеству» Майкла Фарадея – грандиозным трехтомным трудом, который гениальный экспериментатор создавал более 20 лет.[2] Именно здесь Фарадей вводит понятие поля и шаг за шагом разрабатывает идею о физической реальности этого объекта. При этом важно отметить, что «Экспериментальные исследования» Фарадея – одна из величайших книг в истории физики – написаны прекрасным языком, не содержат ни единой формулы и вполне доступны школьникам.

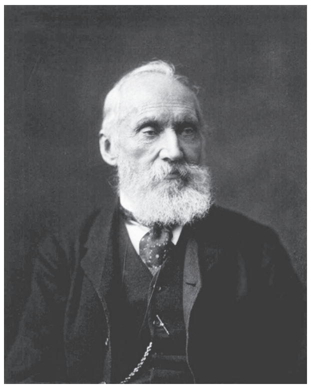
Введение поля. Фарадей, Томсон и Максвелл

Термин «поле» (точнее: «магнитное поле», «поле магнитных сил») был введен Фарадеем в 1845 году в ходе исследований явления диамагнетизма (термины «диамагнетизм» и «парамагнетизм» также были введены Фарадеем) – обнаруженного ученым эффекта слабого отталкивания магнитом ряда веществ. Первоначально поле рассматривалось Фарадеем как сугубо вспомогательное понятие, по сути координатная сетка, образованная магнитными силовыми линиями и использовавшаяся при описании характера движения тел вблизи магнитов. Так, кусочки диамагнитных веществ, например висмута, перемещались из областей сгущения силовых линий в области их разрежения и распо-

---

[1] Имеется в виду книга Р.Фейнмана, Р.Лейтона и М.Сэндса «Фейнмановские лекции по физике» (М.: Мир, 1967) (*Прим. ред.*)

[2] В русском переводе первый том этой книги вышел в 1947 году, второй – в 1951, а третий – в 1959 году в серии «Классики науки» (М.: Издательство АН СССР). (*Прим.ред.*)



Уильям Томсон (лорд Кельвин)

лагались перпендикулярно направлению линий.

Несколько позже, в 1851–1852 годах, при математическом описании результатов некоторых экспериментов Фарадея, термин «поле» эпизодически использовал английский физик Уильям Томсон (1824–1907).[3] Что же касается создателя теории электромагнитного поля Джеймса Клерка Максвелла (1831–1879), то в его работах термин «поле» поначалу тоже практически не встречается и используется лишь для обозначения той части пространства, в которой можно обнаружить магнитные силы. Только в опубликованной в 1864–1865 годах работе «Динамическая теория электромагнитного поля», в которой впервые появляется система «уравнений Максвелла» и предсказывается возможность существования электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света, о поле говорится как о физической реальности.

Джеймс Клерк Максвелл

Такова вкратце история введения в физику понятия «поле». Из нее видно, что первоначально это понятие рассматривалось как сугубо вспомогательное, обозначавшее просто ту часть пространства (она может быть и неограниченной), в которой можно обнаружить магнитные силы и изобразить их распределение при помощи силовых линий. (Термин «электрическое поле» стал использоваться только после создания Максвеллом теории электромагнитного поля.)

Важно подчеркнуть, что ни силовые линии, известные физикам до Фарадея, ни «состоящее» из них поле не рассматривались (и не могли рассматриваться!) научным сообществом XIX века как физическая реальность. Попытки же Фарадея говорить о материальности силовых линий (или Максвелла – о материальности поля) воспринимались учеными как совершенно ненаучные. Даже Томсон, старый друг Максвелла, сам много сделавший для разработки математических основ физики поля (именно Томсон, а не Максвелл, первым показал возможность «перевода» языка силовых линий Фарадея на язык дифференциальных уравнений в частных производных), называл теорию электромагнитного поля «математическим нигилизмом» и долгое время отказывался ее признавать. Понятно, что поступать подобным образом Томсон мог, лишь имея на то очень серьезные основания. И такие основания у него были.

Поле сил и сила Ньютона

Причина, по которой Томсон не мог признать реальность силовых линий и полей, проста. Силовые линии электрического и магнитного полей определяются как непрерывные линии, проведенные в пространстве так, что касательные к ним в каждой точке указывают направления действующих в этой точке электрических и магнитных сил. Величины и направления этих сил вычисляются при помощи законов Кулона, Ампера и Био–Савара–Лапласа. Однако в основе этих законов лежит принцип дальнодействия, допускающий возможность мгновенной передачи на любое расстояние действия одного тела на другое и, тем самым, исключающий существование каких-либо материальных посредников между взаимодействующими зарядами, магнитами и токами.

Следует отметить, что многие ученые со скепсисом относились к принципу, по которому тела каким-то загадочным образом могут действовать там, где их нет. Даже Ньютон, который первым использовал этот принцип при выводе закона всемирного тяготения, полагал, что между взаимодействующими телами может существовать какая-то субстанция. Но строить гипотезы о ней ученый не пожелал, предпочитая заниматься разработкой математических теорий законов, опирающихся на твердо установленные факты. Аналогичным образом поступали и последователи Ньютона. По словам Максвелла, они буквально «вымели из физики» всевозможные невидимые атмосферы и истечения, которыми в XVIII веке окружали магниты и заряды сторонники концепции близкодействия. Тем не менее, в физике XIX века постепенно начинает возрождаться интерес к, казалось бы, навсегда забытым идеям.

Одной из важнейших предпосылок этого возрождения стали проблемы, возникавшие при попытках объяснения новых явлений – прежде всего, явлений электромагнетизма – на основе принципа дальнодействия. Эти объяснения становились все более искусственными. Так, в 1845 году немецкий физик Вильгельм Вебер (1804–1890) обобщил закон Кулона, введя в него члены, определяющие зависимость силы взаимодействия электрических зарядов от их относительных скоростей и ускорений. Физический смысл такой зависимости был непонятен, а веберовские добавки в закон Кулона явно носили характер гипотезы, введенной, чтобы объяснить явления электромагнитной индукции.

В середине XIX века физики все более осознавали, что при изучении явлений электричества и магнетизма эксперимент и теория начинают говорить на разных языках. В принципе, ученые были готовы согласиться с идеей о существовании субстанции, передающей взаимодействие между зарядами и токами с конечной скоростью, однако принять идею о физической реальности поля они не могли. В первую очередь, из-за

[3] В 1892 году Уильям Томсон был удостоен дворянского титула «лорд Кельвин» за фундаментальные работы в различных областях физики, в частности по прокладке трансатлантического кабеля, связавшего Англию и США.

внутренней противоречивости этой идеи. Дело в том, что в физике Ньютона сила вводится как причина ускорения материальной точки. Ее (силы) величина равна, как известно, произведению массы этой точки на ускорение. Тем самым, сила как физическая величина определяется в точке и в момент ее действия. «Сам Ньютон напоминает нам, – писал Максвелл, – что сила существует только до тех пор, пока она действует; ее действие может сохраниться, но сама сила как таковая по существу явление преходящее».

Пытаясь рассматривать поле не как удобную иллюстрацию характера распределения сил в пространстве, а как физический объект, ученые входили в противоречие с тем исходным пониманием силы, на основе которого этот объект был построен. В каждой своей точке поле определяется величиной и направлением силы, действующей на пробное тело (заряд, магнитный полюс, виток с током). По сути, поле «состоит» только из сил, но сила в каждой точке рассчитывается на основе законов, согласно которым говорить о поле как физическом состоянии или процессе бессмысленно. Поле, рассматриваемое как реальность, означало бы реальность сил, существующих вне всякого действия, что полностью противоречило исходному определению силы. Максвелл писал, что в случаях, когда мы говорим о «сохранении силы» и т.п., лучше было бы пользоваться термином «энергия». Это, безусловно, правильно, но энергией чего является энергия поля? К тому времени, когда Максвелл писал приведенные выше строки, он уже знал, что плотность энергии, например, электрического поля пропорциональна квадрату напряженности этого поля, т.е. опять-таки силы, распределенной в пространстве.

С ньютоновским пониманием силы неразрывно связана и концепция мгновенного дальнодействия. Ведь если одно тело действует на другое, удаленное, не мгновенно (по сути, уничтожая расстояние между ними), то нам придется рассматривать силу перемещающейся в пространстве и решать вопрос о том, какая «часть» силы вызывает наблюдаемое ускорение и какой смысл тогда имеет понятие «сила». Либо мы должны допустить, что движение силы (или поля) происходит каким-то особым, не укладывающимся в рамки ньютоновской механики образом.

В 1920 году в статье «Эфир и теория относительности» Альберт Эйнштейн (1879–1955) писал, что, говоря об электромагнитном поле как реальности, мы должны допустить существование особого физического объекта, который принципиально нельзя представить состоящим из частиц, поведение каждой из которых поддается изучению во времени. Позже Эйнштейн охарактеризовал создание теории электромагнитного поля как величайший, со времен Ньютона, переворот в наших взглядах на структуру физической реальности. Благодаря этому перевороту, в физику наряду с представлениями о взаимодействии материальных точек вошли представления о полях, как ни к чему другому не сводимым сущностям.

Но как оказалось возможным это изменение взглядов на реальность? Как физике удалось выйти за свои границы и «увидеть» то, что для нее раньше как реальность просто не существовало?

Исключительно важную роль в подготовке этого переворота сыграли многолетние эксперименты Фарадея с силовыми линиями. Благодаря Фарадею, эти хорошо известные физикам линии превратились из способа изображения распределения в пространстве электрических и магнитных сил в своеобразный «мостик», двигаясь по которому удалось проникнуть в мир, находящийся как бы «за силой», в мир, в котором силы становились проявлениями свойств полей. Понятно, что такое превращение потребовало таланта совершенно особого рода, таланта, которым обладал Майкл Фарадей.

Великий Экспериментатор

Майкл Фарадей родился 22 сентября 1791 года в семье лондонского кузнеца, которая из-за недостатка средств не смогла дать своим детям образования. Майкл – третий ребенок в семье – не закончил и начальной школы и в 12 лет был отдан учеником в переплетную мастерскую. Там он получил возможность читать множество книг, в том числе и научно-популярных, восполняя пробелы своего образования. Вскоре Фарадей начал посещать публичные лекции, которые регулярно устраивали в Лондоне для распространения знаний среди широких слоев населения.

В 1812 году один из членов Лондонского Королевского общества, регулярно пользовавшийся услугами переплетной мастерской, пригласил Фарадея послушать лекции известного физика и химика Гемфри Дэви (1778–1829). Этот момент стал в жизни Фарадея переломным. Юноша окончательно увлекся наукой, а поскольку заканчивался срок его обучения в мастерской, Фарадей рискнул написать Дэви о своем желании заняться исследованиями, приложив к письму тщательно переплетенные конспекты лекций ученого. Дэви, который сам был сыном бедного резчика по дереву, не только ответил на письмо Фарадея, но и предложил ему место ассистента в Лондонском Королевском институте. Так началась научная деятельность Фарадея, продолжавшаяся почти до самой его смерти, наступившей 25 августа 1867 года.


Гемфри Дэви

История физики знает немало выдающихся экспериментаторов, но, пожалуй, только Фарадея называли Экспериментатором с большой буквы. И дело не только в его колоссальных достижениях, среди которых открытия законов электролиза и явлений электромагнитной индукции, исследования свойств диэлектриков и магнетиков и многое другое. Нередко важные открытия удавалось сделать более или менее случайно. О Фарадее сказать такое невозможно. Его исследования всегда отличались поразительной планомерностью и целеустремленностью. Так, в 1821 году Фарадей записал в рабочем дневнике, что начинает поиски связи магнетизма с электричеством и оптикой. Первую связь он обнаружил через 10 лет (открытие электромагнитной индукции), а вторую – через 23 года (открытие вращения плоскости поляризации света в магнитном поле).

В «Экспериментальных исследованиях по электричеству» Фарадея имеется около 3500 параграфов, многие из которых содержат описания проделанных им опытов. И это только то, что Фарадей счел нужным опубликовать. В многотомных «Дневниках» Фарадея, которые он вел с 1821 года, описано около 10 тысяч опытов, причем многие из них ученый поставил без чьей-либо помощи. Интересно, что в 1991 году, когда научный мир отмечал 200-летие со дня рождения Фарадея, английские историки физики решили повторить некоторые из его наиболее знаменитых опытов. Но даже на простое воспроизведение каждого из таких опытов коллективу современных специалистов потребовалось не менее дня работы.

Фарадей в лаборатории

Говоря о заслугах Фарадея, можно сказать, что его главным достижением стало превращение экспериментальной физики в самостоятельную область исследований, результаты которых нередко могут на многие годы опережать развитие теории. Фарадей считал крайне непродуктивным стремление многих ученых как можно быстрее переходить от полученных в экспериментах данных к их теоретическому обобщению. Более плодотворным Фарадею представлялось сохранение длительной связи с изучаемыми явлениями, чтобы иметь возможность детально проанализировать все их особенности, вне зависимости от того, соответствуют эти особенности принятым теориям или нет.

Этот подход к анализу опытных данных Фарадей распространил и на хорошо известные опыты по выстраиванию железных опилок вдоль силовых линий магнитного поля. Безусловно, ученый прекрасно знал, что узоры, которые образуют железные опилки, легко можно объяснить на основе принципа дальнодействия. Тем не менее, Фарадей считал, что в данном случае экспериментаторы должны исходить не из придуманных теоретиками концепций, а из явлений, свидетельствующих, по его мнению, о существовании в пространстве, окружающем магниты и токи, неких обладающих готовностью к действию состояний. Другими словами, силовые линии, по мнению Фарадея, указывали на то, что сила должна мыслиться не только как действие (на материальную точку), но и как способность к действию.

Важно подчеркнуть, что, следуя своей методике, Фарадей не пытался выдвигать какие-либо гипотезы о природе этой способности к действию, предпочитая постепенно накапливать опыт в ходе работы с силовыми линиями. Начало этой работе было положено в его исследованиях явлений электромагнитной индукции.

Затянувшееся открытие

Во многих учебниках и справочниках можно прочитать о том, что 29 августа 1831 года Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. Историкам науки хорошо известно, что датировка открытий – вещь сложная и часто весьма запутанная. Не составляет исключение и открытие электромагнитной индукции. Из «Дневников» Фарадея известно, что это явление он наблюдал еще в 1822 году во время опытов с двумя проводящими контурами, надетыми на сердечник из мягкого железа. Первый контур был подключен к источнику тока, а второй – к гальванометру, который зафиксировал возникновение кратковременных токов при включении или отключении тока в первом контуре. Позже выяснилось, что подобные явления наблюдали и другие ученые, но, как и поначалу Фарадей, сочли их погрешностью эксперимента.

Дело в том, что в поисках явлений порождения электричества магнетизмом ученые были нацелены на обнаружение устойчивых эффектов, подобных, например, открытому Эрстедом в 1818 году явлению магнитного действия тока. От этой всеобщей «слепоты» Фарадея спасли два обстоятельства. Во-первых, пристальное внимание к любым явлениям природы. В своих статьях Фарадей сообщал как об удачных, так и о неудачных экспериментах, полагая, что неудачный (не обнаруживший искомый эффект), но осмысленно поставленный опыт тоже содержит какую-то информацию о законах природы. Во-вторых, незадолго до открытия Фарадей много экспериментировал с разрядами конденсаторов, что, несомненно, обострило его внимание к кратковременным эффектам. Регулярно просматривая свои дневники (для Фарадея это было постоянной составляющей исследований), ученый, судя по всему, по-новому взглянул на опыты 1822 года и, воспроизведя их, осознал, что имеет дело не с помехами, а с искомым явлением. Датой этого осознания и стало 29 августа 1831 года.

Далее начались интенсивные исследования, в ходе которых Фарадей открыл и описал основные явления электромагнитной индукции, включая возникновение индукционных токов при относительном движении проводников и магнитов. На основании этих исследований Фарадей пришел к выводу о том, что решающим условием возникновения индукционных токов является именно *пересечение* проводником линий магнитной силы, а не переход в области больших или меньших сил. При этом, например, возникновение тока в одном проводнике при включении тока в другом, расположенном рядом, Фарадей тоже объяснял как результат пересечения проводником силовых линий: «магнитные кривые как бы движутся (если можно так выразиться) поперек индуцируемого провода, начиная с момента, когда они начинают развиваться, и вплоть до момента, когда магнитная сила тока достигнет наибольшего значения; они как бы распространяются в стороны от провода и, следовательно, оказываются по отношению к неподвижному проводу в том же положении, как если бы он двигался в противоположном направлении поперек них».

Обратим внимание на то, сколько раз в приведенном отрывке Фарадей использует слова «как бы», а также на то, что у него пока нет привычной нам количественной формулировки закона электромагнитной индукции: сила тока в проводящем контуре пропорциональна скорости изменения числа магнитных силовых линий, проходящих через этот контур. Близкая к этой формулировка появляется у Фарадея лишь в 1851 году, причем она относится только к случаю движения проводника в статическом магнитном поле. По Фарадею, если проводник перемещается в таком поле с постоянной скоростью, то сила возникающего в нем электрического тока пропорциональна этой скорости, а количество приводимого в движение электричества пропорционально числу пересекаемых проводником силовых линий магнитного поля.

Осторожность Фарадея при формулировке закона электромагнитной индукции обусловлена, прежде всего, тем, что корректно пользоваться понятием силовой линии он мог только применительно к статическим полям. В случае же переменных полей это понятие приобретало метафорический характер, и непрерывные оговорки «как бы», когда речь идет о движущихся силовых линиях, показывают, что Фарадей это прекрасно понимал. Он также не мог не считаться с критикой тех ученых, которые указывали ему на то, что силовая линия – это, строго говоря, геометрический объект, говорить о движении которого просто бессмысленно. Кроме того, в опытах мы имеем дело с заряженными телами, проводниками с током и т.д., а не с абстракциями вроде силовых линий. Поэтому Фарадей должен был показать, что при изучении хотя бы некоторых классов явлений нельзя ограничиться рассмотрением проводников с током и не учитывать окружающее их пространство. Так, в работе, посвященной исследованиям явлений самоиндукции, ни разу не упомянув силовые линии, Фарадей выстраивает рассказ о проделанных им экспериментах таким образом, что читатель постепенно сам приходит к выводу о том, что подлинная причина наблюдаемых явлений – не проводники с током, а нечто, находящееся в окружающем их пространстве.

Поле как предчувствие. Исследования явлений самоиндукции

В 1834 году Фарадей опубликовал девятую часть «Экспериментальных исследований», которая называлась «Об индуктивном влиянии электрического тока на самого себя и об индуктивном действии токов вообще». В этой работе Фарадей исследовал явления самоиндукции, открытые в 1832 году американским физиком Джозефом Генри (1797–1878), и показал, что они представляют частный случай изученных им ранее явлений электромагнитной индукции.

Свою работу Фарадей начинает с описания ряда явлений, состоящих в том, что при размыкании электрической цепи, содержащей длинные проводники или обмотку электромагнита, в точке разрыва контакта возникает искра или ощущается удар током, если контакт разъединяют руками. В то же время, указывает Фарадей, если проводник короткий, то никакими ухищрениями получить искру или электрический удар не удается. Тем самым выяснилось, что возникновение искры (или удара) зависит не столько от силы тока, протекавшего по проводнику до разрыва контакта, сколько от длины и конфигурации этого проводника. Поэтому Фарадей в первую очередь стремится показать, что, хотя исходной причиной искры является ток (если в цепи его не было вообще, то никакой искры, естественно, не будет), сила тока решающего значения не имеет. Для этого Фарадей описывает последовательность экспериментов, в которых длина проводника сначала увеличивается, что приводит к усилению искры, несмотря на ослабление тока в цепи из-за увеличения сопротивления. Затем этот проводник перекручивают так, чтобы ток протекал только через его небольшую часть. Сила тока при этом резко возрастает, но искра при размыкании цепи исчезает. Таким образом, ни проводник сам по себе, ни сила тока в нем не могут рассматриваться как причина искры, величина которой, как выясняется, зависит не только от длины проводника, но и от его конфигурации. Так, при сворачивании проводника в спираль, а также при введении в эту спираль железного сердечника величина искры тоже возрастает.

В продолжение изучения этих явлений Фарадей подключил параллельно месту размыкания контакта вспомогательный короткий проводник, сопротивление которого значительно больше, чем у основного проводника, но меньше, чем у искрового промежутка или у тела человека, размыкающего контакт. В результате искра при размыкании контакта исчезла, а во вспомогательном проводнике возник сильный кратковременный ток (Фарадей называет его экстратоком), направление которого оказалось противоположным направлению тока, который протекал бы через него от источника. «Эти опыты, – пишет Фарадей, – устанавливают существенное различие между первичным, или возбуждающим, током и экстратоком в отношении количества, интенсивности и даже направления; они привели меня к заключению, что экстраток тождествен с описанным мной ранее индуцированным током».

Выдвинув идею о связи изучаемых явлений с явлениями электромагнитной индукции, Фарадей далее поставил ряд остроумных экспериментов, подтверждающих эту идею. В одном из таких экспериментов рядом со спиралью, подключенной к источнику тока, помещалась другая спираль, разомкнутая. При отключении от источника тока первая спираль давала сильную искру. Однако если концы другой спирали замыкались, искра практически исчезала, а во второй спирали возникал кратковременный ток, направление которого совпадало с направлением тока в первой спирали, если цепь размыкали, и было противоположно ему, если цепь замыкали.

Установив связь двух классов явлений, Фарадей смог легко объяснить выполненные ранее опыты, а именно усиление искры при удлинении проводника, сворачивании его в спираль, введении в нее железного сердечника и т.д.: «Если наблюдать индуктивное действие провода длиной в один фут на расположенный рядом провод длиной также в один фут, то оно оказывается очень слабым; но если тот же самый ток пропустить через провод длиной в пятьдесят футов, то он будет индуцировать в соседнем пятидесятифутовом проводе в момент замыкания или размыкания контакта значительно более сильный ток, как будто каждый лишний фут провода вносит нечто в суммарное действие; по аналогии мы заключаем, что такое же явление должно иметь место и тогда, когда соединительный проводник служит одновременно проводником, в котором образуется индуцированный ток». Поэтому, делает вывод Фарадей, увеличение длины проводника, сворачивание его в спираль и введение в нее сердечника усиливает искру. К действию одного витка спирали на другой прибавляется действие размагничивающегося сердечника. При этом совокупность таких действий может и компенсировать друг друга. Например, если сложить вдвое длинный изолированный провод, то изза противоположности индуктивных действий двух его половин искра исчезнет, хотя в распрямленном состоянии этот провод дает сильную искру. К существенному ослаблению искры приводила и замена сердечника из железа на сердечник из стали, которая размагничивается очень медленно.

Итак, проводя читателя через детальные описания совокупностей проделанных экспериментов, Фарадей, не говоря ни слова о поле, формировал у него, читателя, представление о том, что решающая роль в изучаемых явлениях принадлежит не проводникам с током, а создаваемому ими в окружающем пространстве какому-то состоянию намагниченности, точнее – скорости изменения этого состояния. Однако вопрос о том, существует ли это состояние реально и может ли оно быть предметом экспериментальных исследований, оставался открытым.

Проблема физической реальности силовых линий

Существенный шаг в доказательстве реальности силовых линий Фарадею удалось сделать в 1851 году, когда он пришел к идее обобщения понятия силовой линии. «Магнитную силовую линию, – писал Фарадей, – можно определить как линию, которую описывает небольшая магнитная стрелка, когда ее перемещают в ту или иную сторону по направлению ее длины, так что стрелка все время остается касательной к движению; или, иначе, это та линия, вдоль которой можно в любую сторону перемещать поперечный провод и в последнем не появится никакого стремления к возникновению какого-нибудь тока, между тем как при перемещении его в любом ином направлении такое стремление существует».

Силовая линия, таким образом, определялась Фарадеем на основе двух различных законов (и пониманий) действия магнитной силы: ее механического действия на магнитную стрелку и ее способности (в соответствии с законом электромагнитной индукции) порождать электрическую силу. Это двойное определение силовой линии как бы «материализовало» ее, придавало ей смысл особых, экспериментально обнаруживаемых направлений в пространстве. Поэтому Фарадей назвал такие силовые линии «физическими», полагая, что теперь сможет окончательно доказать их реальность. Проводник в таком двойном определении можно было представить замкнутым и скользящим вдоль силовых линий так, чтобы, постоянно деформируясь, он не пересекал линий. Этот проводник выделил бы некоторое условное «количество» линий, сохраняющихся при их «сгущении» или «разрежении». Такое скольжение проводника в поле магнитных сил без возникновения в нем электрического тока могло бы рассматриваться как экспериментальное доказательство сохранения количества силовых линий при их «распространении», например из полюса магнита, и, тем самым, как доказательство реальности этих линий.

Безусловно, реальный проводник практически невозможно перемещать так, чтобы он не пересекал силовые линии. Поэтому гипотезу о сохранении их количества Фарадей обосновывал иначе. Пусть магнит с полюсом N и проводник *abcd* расположены так, что могут вращаться по отношению друг к другу вокруг оси *ad* (рис.1; рисунок выполнен автором статьи на основе рисунков Фарадея). При этом часть проводника *ad* проходит через отверстие в магните и

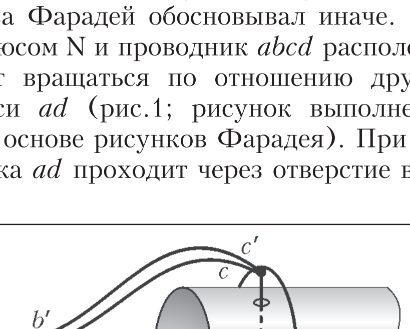


Рис. 1

имеет свободный контакт в точке d. Свободный контакт сделан и в точке c, так что участок bc может вращаться вокруг магнита, не разрывая электрической цепи, подключенной в точках a и b (тоже посредством скользящих контактов) к гальванометру. Проводник bc при полном повороте вокруг оси ad пересекает *все* силовые линии, выходящие из полюса магнита N. Пусть теперь проводник вращается с постоянной скоростью. Тогда, сравнивая показания гальванометра при различных положениях вращающегося проводника, например в положении $abcd$ и в положении $ab'c'd$, когда проводник за полный оборот вновь пересекает *все* силовые линии, но уже в местах их большей разреженности, можно обнаружить, что показания гальванометра одинаковы. По мнению Фарадея, это свидетельствует о сохранении некоторого условного количества силовых линий, которым можно охарактеризовать северный полюс магнита (чем больше это «количество», тем сильнее магнит).

Вращая в своей установке (рис.2; рисунок Фарадея) не проводник, а магнит, Фарадей приходит к выводу о

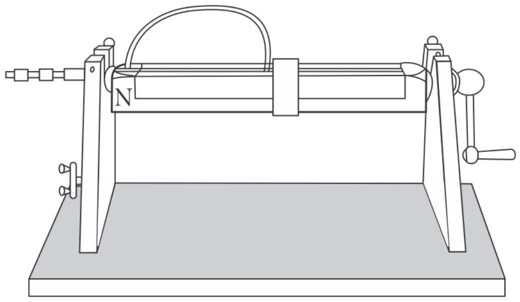


Рис. 2

сохранении количества силовых линий во внутренней области магнита. При этом в основе его рассуждений лежит предположение о том, что силовые линии не увлекаются вращающимся магнитом. Эти линии остаются «на месте», а магнит вращается среди них. В этом случае ток по величине получается таким же, как при вращении внешнего проводника. Фарадей объясняет этот результат тем, что, хотя внешняя часть проводника не пересекает линий, его внутренняя часть (cd), вращающаяся вместе с магнитом, пересекает все линии, проходящие внутри магнита. Если же внешнюю часть проводника закрепить и вращать вместе с магнитом, то ток не возникает. Это тоже можно объяснить. Действительно, внутренняя и внешняя части проводника пересекают одно и то же количество силовых линий, направленных в одном направлении, поэтому токи, индуцируемые в обеих частях проводника, компенсируют друг друга.

Из экспериментов следовало, что внутри магнита силовые линии идут не от северного полюса к южному, а наоборот, образуя с внешними силовыми линиями замкнутые кривые, что позволило Фарадею сформулировать закон сохранения количества магнитных силовых линий во внешнем и внутреннем пространствах постоянного магнита: «Этим поразительным распределением сил, которое выявляется с помощью движущегося проводника, магнит в точности походит на электромагнитную катушку как по тому, что силовые линии протекают в виде замкнутых кругов, так и по равенству их суммы внутри и снаружи». Тем самым, понятие «количество силовых линий» получало права гражданства, благодаря чему формулировка закона пропорциональности электродвижущей силы индукции количеству силовых линий, пересекаемых проводником в единицу времени, приобретала физический смысл.

Однако Фарадей признавал, что полученные им результаты не являются окончательным доказательством реальности силовых линий. Для такого доказательства, писал он, надо «установить отношение силовых линий ко времени», т.е. показать, что эти линии могут перемещаться в пространстве с конечной скоростью и, следовательно, могут быть обнаружены какими-либо физическими методами.

Важно подчеркнуть, что проблема «физических силовых линий» не имела для Фарадея ничего общего с попытками непосредственного обнаружения обычных силовых линий. Со времени открытия электромагнитной индукции Фарадей верил, что и обычные силовые линии, и законы электромагнетизма – это проявления каких-то особых свойств материи, ее особого состояния, которое ученый назвал электротоническим. При этом вопрос о сущности этого состояния и его связи с известными формами материи являлся, считал Фарадей, открытым: «Каково это состояние и от чего оно зависит, мы сейчас не можем сказать. Может быть, оно обусловлено эфиром, подобно световому лучу… Может быть, это – состояние напряжения, или состояние колебания, или еще какое-либо состояние, аналогичное электрическому току, с которым так тесно связаны магнитные силы. Необходимо ли для поддержания этого состояния присутствие материи, зависит от того, что понимать под словом «материя». Если понятие материи ограничить весомыми или тяготеющими веществами, тогда присутствие материи столь же мало существенно для физических линий магнитной силы, как для лучей света и теплоты. Но если, допуская эфир, мы примем, что это – род материи, тогда силовые линии могут зависеть от каких-либо ее действий».

Столь пристальное внимание, которое Фарадей уделял силовым линиям, было обусловлено в первую очередь тем, что он видел в них мостик, ведущий в какой-то совершенно новый мир. Однако пройти по этому мостику было трудно даже такому гениальному экспериментатору, как Фарадей. Собственно, эта задача вообще не допускала чисто экспериментального решения. Однако в пространство между силовыми линиями можно было попытаться проникнуть математически. Именно это и сделал Максвелл. Его знаменитые уравнения стали тем инструментом, который позволил проникнуть в несуществующие промежутки между силовыми линиями Фарадея и, в результате, обнаружить там новую физическую реальность. Но это уже другая история – история о Великом Теоретике.

Степени n и n-е степени

П.КОЖЕВНИКОВ, В.СЕНДЕРОВ

Начнем со следующей задачи из задачника «Кванта».

Задача М2212. *Докажите, что для любого натурального $a \geq 3$ существуют бесконечно много натуральных n таких, что*

а) $a^n - 1$ делится на n; б) $a^n - 1$ делится на n^2.*

В этой заметке мы приведем ее решение, а также рассмотрим ее обобщения и близкие задачи.[1] Все рассматриваемые здесь числа предполагаются целыми.

Зафиксируем целое число a. Будем говорить, что натуральное число n является a-хорошим, если $a^n - 1$ делится на n. Множество всех a-хороших чисел обозначим $A_1(a)$. Множество всех натуральных чисел n, для которых $a^n - 1$ делится на n^2, обозначим $A_2(a)$ (читатель может назвать такие числа a-отличными, или, скажем, a-дважды хорошими). Вообще, для каждого натурального k через $A_k(a)$ обозначим множество натуральных чисел n, для которых $a^n - 1$ делится на n^k. Ясно, что $A_1(a) \supset A_2(a) \supset A_3(a) \supset \ldots \supset \{1\}$. Таким образом, в задаче М2212 утверждается, что при $a \geq 3$ множество а) $A_1(a)$; б) $A_2(a)$ бесконечно.

Цепочки хороших чисел

Решение I задачи а). Пусть n является a-хорошим числом, и $a^n - 1 = kn$. Здесь $k > 1$, так как при $a \geq 3$ имеем $a^n - 1 > n$. Если $t > 1$ – любой делитель k, то $a^{tn} - 1 = \left(a^n - 1\right)\left(a^{(t-1)n} + a^{(t-2)n} + \ldots + a^n + 1\right)$ делится на $a^n - 1$, а значит, и на tn. Таким образом, вместе с n число tn тоже является a-хорошим. Поэтому, начиная с a-хорошего числа $n = 1$, переходами $n \to tn$ получаем бесконечную возрастающую цепочку чисел из множества $A_1(a)$.

Приведем несколько другое решение пункта а). Используем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $x - 1$ делится на натуральное m, то $x^{t-1} + x^{t-2} + \ldots + x + 1$ делится на m тогда и только тогда, когда t делится на m.*

Доказательство. Действительно, $x \equiv 1 \pmod{m}$, поэтому каждое из t слагаемых в сумме $x^{t-1} + x^{t-2} + \ldots + x + 1$ дает остаток 1 при делении на m, т.е. $x^{t-1} + x^{t-2} + \ldots + x + 1 \equiv t \pmod{m}$.

Упражнение 1. а) Пусть $x - y$ делится на натуральное m. Докажите, что если t делится на m, то $x^{t-1} + x^{t-2}y + x^{t-3}y^2 + \ldots + xy^{t-2} + y^{t-1}$ делится на m.

б) Докажите обратное утверждение в предположении $\text{НОД}(y, m) = 1$.

[1] Некоторые задачи предлагаются в виде упражнений, не все из которых простые.

Решение II задачи а). Пусть $n \in A_1(a)$, и t – делитель $a^n - 1$. Тогда $a^{tn} - 1 = \left(a^n - 1\right)\left(a^{(t-1)n} + a^{(t-2)n} + \ldots + a^n + 1\right)$. Первая скобка делится на n. Вторая скобка имеет вид $x^{t-1} + x^{t-2} + \ldots + x + 1$, где $x = a^n$. Так как $x - 1$ делится на t, то по лемме 1 вторая скобка делится на t. Итак, $a^{tn} - 1$ делится на tn, значит, вместе с $n \in A_1(a)$ число tn принадлежит множеству $A_1(a)$. Как и в первом решении, получаем бесконечную возрастающую цепочку чисел из $A_1(a)$.

Решение задачи б). Пусть $n \in A_2(a)$, и пусть $a^n - 1 > n^2$, т.е. $a^n - 1 = kn^2$, где $k > 1$. Если $t > 1$ – любой делитель k, то $a^{tn} - 1 = \left(a^n - 1\right)\left(a^{(t-1)n} + \ldots + a^n + 1\right)$. Первая скобка делится на tn^2. По лемме 1 вторая скобка делится на t, причем она очевидно больше t. Поэтому $a^{tn} - 1$ делится на $(tn)^2$, причем $a^{tn} - 1 > (tn)^2$.

Как и в задаче а), начиная с числа $1 \in A_2(a)$, переходами $n \to tn$ получаем бесконечную возрастающую цепочку чисел из $A_2(a)$.

Упражнение 2. Для пары чисел (a, b) и натурального k договоримся (здесь и далее) обозначать через $A_k(a, b)$ множество чисел n таких, что $a^n - b^n$ делится на n^k. В частности, $A_k(a) = A_k(a, 1)$. Докажите, что если a и b – натуральные, $a - b \geq 2$, то $A_2(a, b)$ бесконечно.[2]

Показатели по модулю

Чтобы узнать больше о хороших числах (т.е. о том, как устроены множества $A_k(a)$), нам потребуется следующее важное понятие *показателя числа по некоторому модулю*. Пусть дано число a и натуральное $d > 1$, так что $\text{НОД}(a, d) = 1$. Напишем d чисел 1, a, a^2, …, a^{d-1} и отыщем среди них два числа, имеющих равные остатки при делении на d (такие найдутся, так как ни одно из написанных чисел не делится на d, т.е. не имеет остаток 0). Пусть это числа a^k и a^l, где $0 \leq k < l \leq d - 1$. Тогда разность $a^l - a^k = a^k\left(a^{l-k} - 1\right)$ делится на d, и в силу $\text{НОД}(a, d) = 1$ получаем, что $a^{l-k} - 1$ делится на d. Приведенное выше красивое (и часто применяемое) рассуждение приводит к тому, что нашлось натуральное m ($m = l - k$) такое, что $a^m \equiv 1 \pmod{d}$. Наименьшее из таких натуральных m

[2] Как выяснилось после публикации М2212, это обобщение задачи содержится в книге Н.М.Седракяна «Теория чисел в задачах» (Ереван: Эдит Принт, 2007. Задача 10.5). Авторская идея решения также состоит в продолжении цепочки подходящих чисел n.

называется *показателем* числа a по модулю d. Как видно из предыдущих рассуждений, показатель a по модулю d всегда меньше d. Отметим, что $a \equiv 1 \pmod{d}$ означает, что показатель по модулю d равен 1.

Лемма 2. *Пусть число a и натуральное $d > 1$ таковы, что НОД$(a, d) = 1$. Пусть δ – показатель a по модулю d, k – натуральное. Тогда $a^k - 1$ делится на d, если и только если k делится на δ.*[3]

Доказательство. Разделим k на δ с остатком: $k = q\delta + r$, $r \in \{0, 1, \ldots, \delta - 1\}$. Так как $a^\delta \equiv 1 \pmod{1}$, то $a^k \equiv a^r \pmod{d}$, откуда и следует нужное утверждение: если $r = 0$, то $a^r \equiv 1 \pmod{d}$, а если $r \in \{1, \ldots, \delta - 1\}$, то $a^r \not\equiv 1 \pmod{d}$ по определению δ.

Задача 1. *Пусть $n > 1$, $n \in A_1(a)$. Тогда $a - 1$ делится на наименьший простой делитель числа n.*

Решение. Пусть p – наименьший простой делитель n, а δ – показатель числа a по модулю p (этот показатель существует, причем $1 \le \delta < p$). По условию $a^n - 1$ делится на p. По лемме 2 получаем, что n делится на δ. Но как мы отмечали, $\delta < p$, и в силу выбора p имеем $\delta = 1$. Это и означает, что $a \equiv 1 \pmod{p}$.

Из задачи 1 вытекает, что в множестве $A_1(a)$ лишь одно число $n = 1$ взаимно просто с $a - 1$. В частности, при $a = 2$ получаем $A_1(a) = \{1\}$, что контрастирует с задачей М2212.

Упражнения

3. Найдите все пары натуральных чисел a, b такие, что $2^a - 1$ делится на b, а $2^b - 1$ делится на a.

4. Если НОД$(a - b, n) = 1$ и $n \in A_1(a, b)$, то $n = 1$. В частности, $A_1(a, a - 1) = \{1\}$.

Пусть $n \in A_1(a)$ и $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ – его разложение на простые множители. Пусть простые множители занумерованы в порядке возрастания, т.е. $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_k$. Как следует из задачи 1, $a - 1$ делится на p_1. Теперь для $m = p_2 \ldots p_k$ имеем $\left(a^{p_1}\right)^m - 1$ делится на m, т.е. $m \in A_1\left(a^{p_1}\right)$, и снова по задаче 1 получаем, что $a^{p_1} - 1$ делится на p_2. Продолжая далее, получаем, что $a^{p_1 p_2 \ldots p_i} - 1$ делится на p_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Возвращаясь ко второму решению задачи М2212, мы понимаем, что получена в явном виде цепочка a-хороших чисел $1 \to p_1 \to p_1 p_2 \to \ldots \to p_1 p_2 \ldots p_k = n$, ведущая от 1 до n.[4] Последние соображения помогают решить следующие две задачи.

Задача 2. *Если $n > 2$ и $n \in A_1(3)$, то n делится на 4.*

Решение. Пусть $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ – 3-хорошее число, где $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_k$ – простые числа. Как мы видели, $3 - 1$ делится на p_1, откуда $p_1 = 2$. Так как $n > 2$, то $k \ge 2$, и $3^{p_1} - 1 = 8$ должно делиться на p_2, откуда $p_2 = 2$.

Упражнение 5 (см. задачу М2067 в «Кванте» №6 за 2007 г.). Если $n \ge 2$ и $n \in A_1(10)$, то n делится на 3.

Задача 3. *Пусть $a \ne \pm 1$. Тогда для данного числа s множество $A_1(a)$ содержит лишь конечное количество чисел, в разложение которых на простые множители входит не более s простых чисел.*[5]

Решение. Пусть $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ – a-хорошее число, где $k \le s$, и $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_k$ – простые числа. Как мы видели, $a - 1$ делится на p_1, значит, p_1 может принимать лишь конечное множество значений. Далее, $a^{p_1} - 1$ делится на p_2, значит, p_2 тоже может принимать лишь конечное множество значений. Продолжая так далее, получаем требуемое.

Следующие два упражнения дополняют картину для $a = 2$.

Упражнения

6. Как мы видели, при $n > 1$ число $2^n - 1$ не делится на n, значит, НОД$\left(2^n - 1, n\right) \le \frac{n}{2}$. Докажите, что равенство НОД$\left(2^n - 1, n\right) = \frac{n}{2}$ выполняется для бесконечного количества четных n.

7. Как видно из решения упражнения 6, существует возрастающая геометрическая прогрессия натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такая, что последовательность k_n=НОД$\left(2^{a_n} - 1, a_n\right)$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Пользуясь теоремой Дирихле[6], докажите, что бесконечной возрастающей арифметической прогрессии с аналогичным свойством не существует.

Борьба за свободу... от квадратов

Натуральное число называется *свободным от квадратов*, если оно не делится ни на какой точный квадрат, больший 1. Иначе говоря, в разложении свободного от квадратов числа на простые сомножители каждое простое число присутствует не более чем в первой степени. Оказывается, возможно следующее усиление М2212.

Задача 4. *Пусть $a \ge 4$. Тогда $A_2(a)$ содержит бесконечно много свободных от квадратов чисел.*[7]

---

[3] Из этой леммы и малой теоремы Ферма следует, что показатель a по модулю простого числа p является делителем числа $p - 1$. Более общо, по теореме Эйлера, показатель a по модулю натурального $d > 1$ является делителем числа $\varphi(d)$, где $\varphi(d)$ обозначает количество натуральных чисел, меньших d и взаимно простых с d.

[4] Получаем, в частности, что любое a-хорошее число можно получить именно так, как описано во втором решении задачи М2212. Кстати, цепочку a-хороших чисел из первого решения задачи М2212 можно сконструировать «с конца»: пусть $n \in A_1(a)$, а δ – показатель числа a по модулю n, тогда $\delta \in A_1(a)$ (или $t \in A_1(a)$, где t – любое число такое, что $n \vdots t \vdots \delta$).

[5] Утверждение этой задачи противоположно ошибочному утверждению, напечатанному на странице 48 книги В.Серпинского «250 задач по элементарной теории чисел» (М.: Просвещение, 1968).

[6] Теорема Дирихле утверждает, что в возрастающей арифметической прогрессии $\{a + nd \mid n \in \mathbb{N}\}$, где a и d – натуральные и взаимно простые, встречается бесконечно много простых чисел. Доказательство этой теоремы не элементарно. На самом деле, для решения задачи достаточно воспользоваться лишь частным случаем теоремы Дирихле для прогрессии $\{1 + nd \mid n \in \mathbb{N}\}$, доказательство которого проще.

[7] Аналогичный вопрос про $A_1(a)$ предлагался на летних сборах команды России перед международной математической олимпиадой.

Решение.

Лемма 3. *Если $a-1$ делится на нечетное простое p, то $s = a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a^2 + a + 1$ не делится на p^2.*

Доказательство. Случай $a = 1$ очевиден. Если $a-1 = p^{\alpha}k$, где k не делится на p, то $a^p - 1 = \left(1+p^{\alpha}k\right)^p - 1$. Разложение по биному дает

$$a^p = \left(1+p^{\alpha}k\right)^p =$$

$$= 1 + p\cdot p^{\alpha}k + \frac{p(p-1)}{2}\cdot p^{2\alpha}k^2 + \ldots = 1 + p^{\alpha+1}k + p^{\alpha+2}l,$$

где l – целое. Видим, что $a^p - 1$ не делится на $p^{\alpha+2}$ (делится ровно на $(\alpha+1)$-ю степень p), значит, $s = \dfrac{a^p-1}{a-1}$ не делится на p^2.

Лемма 4. *Пусть $a \geq 2$, p – нечетное простое число. Тогда число $s = a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a^2 + a + 1$ имеет хотя бы один нечетный простой делитель, не являющийся делителем $a-1$.*

Доказательство. Пусть $d = \text{НОД}(a-1, s)$. Тогда, по лемме 1, p делится на d. Если $d = 1$, то утверждение леммы очевидно. Если же $d = p$ и s не является степенью p, то утверждение леммы также верно. Но по лемме 3 (отметим, что s нечетно при любом a) s не делится на p^2, значит, $s = p^m$ невозможно, ибо $s > p$.

Так же, как и в решении задачи М2212,б), начинаем строить цепочку $1 \to p_1 \to p_1p_2 \to \ldots \to p_1p_2\ldots p_k \to \ldots$ чисел из $A_2(a)$, где $p_1, p_2, \ldots$ – попарно различные простые числа. При четном $a \geq 4$ начало цепочки будет $1 \to p_1$, где p_1 – нечетный простой делитель $a-1$; при нечетном $a \geq 5$ положим $p_1 = 2$, т.е. начало цепочки будет иметь вид $1 \to 2 \to 2p_2$, где p_2 – нечетный простой делитель a^2-1 (так как $a \geq 5$, такое p_2 найдется).

Пусть нами уже построена цепочка $1 \to \ldots \to p_1p_2\ldots p_{k-1} \to p_1p_2\ldots p_k$ чисел из $A_2(a)$, где p_k – нечетное простое число. Положим $p = p_k$, $m = p_1p_2\ldots p_{k-1}$, $n = p_1p_2\ldots p_k$. Согласно построению цепочки, $a^{p_1\ldots p_{i-1}} - 1$ делится на $\left(p_1\ldots p_{i-1}\right)^2 p_i$, $i = 2, \ldots, k$, в частности, $a^m - 1$ делится на pm^2. Для продолжения цепочки $n \to nt$ будем выбирать число $t = p_{k+1}$ простым нечетным делителем числа $\dfrac{a^n-1}{a^m-1} = a^{(p-1)m} + a^{(p-2)m} + \ldots + a^m + 1$, на который не делится $a^m - 1$ (такое t найдется по лемме 4), тогда pm^2 тоже не делится на t, и, значит, $n = pm$ не делится на t. Итак, наша цепочка чисел из $A_2(a)$ может быть продолжена до бесконечности.

Множества $A_k(n)$ для $k \geq 3$ и LTE-лемма

Как мы видели, множества $A_1(a)$ и $A_2(a)$ для «почти всех» чисел a бесконечны. А насколько велики множества $A_k(a)$ при $k \geq 3$? Ниже мы получим некоторые результаты в этом направлении.

Задача 5. *Пусть $a \neq \pm 1$. Тогда найдется натуральное k такое, что $A_k(a) = \{1\}$.*

Решение.

Лемма 5 (LTE-лемма). *Для простого $p \geq 3$ и числа $a \equiv 1 \pmod p$ справедливо $\nu_p\left(a^n - 1\right) = \nu_p(a-1) + \nu_p(n)$, где $\nu_p(x)$ обозначает наибольшее число t такое, что x делится на p^t.*[8,9]

Доказательство. Предположим, что лемма верна для некоторого показателя n, тогда согласно лемме 3 она верна и для показателя np, а согласно лемме 1 – и для показателя nt, где t не делится на p. Очевидно, лемма верна при $n = 1$, поэтому указанными переходами $n \to np$, $n \to nt$ докажем ее для произвольного показателя.

Сформулируем также вариант LTE-леммы для $p = 2$.[10]

Лемма 6. *Для $a \equiv 1 \pmod 4$ справедливо $\nu_2\left(a^n - 1\right) = \nu_2(a-1) + \nu_2(n)$.*

Доказательство. Строим доказательство так же, как и в лемме 5. Предположим, что лемма верна для некоторого показателя n. Из условия следует, что $\nu_2\left(a^n + 1\right) = 1$, поэтому лемма верна и для показателя $2n$, а согласно лемме 1 – и для показателя nt, где t нечетно.

Упражнение 8 (LTE-лемма). а) Для простого $p \geq 3$ и чисел a и b, не делящихся на p и таких, что $a \equiv b \pmod p$, справедливо $\nu_p\left(a^n - b^n\right) = \nu_p(a-b) + \nu_p(n)$.

б) Для нечетных a и b таких, что $a \equiv b \pmod 4$, справедливо $\nu_2\left(a^n - b^n\right) = \nu_2(a-b) + \nu_2(n)$.

Перейдем теперь к решению задачи 5. Для $a = 2$ имеем $A_1(2) = \{1\}$. Случай $a = 0$ очевиден. Пусть теперь $|a-1| > 1$.

1) Рассмотрим случай четного a. Пусть α – наибольший из всех показателей, с которыми простые сомножители входят в разложение $a-1$. Выберем $k \geq \alpha + 2$ и предположим, что $n \in A_k(a)$, $n > 1$. По задаче 1, n делится на p, где p – некоторый простой делитель $a-1$. Пусть $\nu_p(n) = \beta$, $\beta \geq 1$. Так как $a-1$ не делится на $p^{\alpha+1}$, то, согласно лемме 5, $a^n - 1$ не делится на $p^{\alpha+1+\beta}$. Но $a^n - 1$ должно делиться на n^k, следовательно, на $p^{k\beta}$. Отсюда $k\beta \leq \alpha + \beta$, следовательно, $\alpha \geq (k-1)\beta \geq k-1$ и $k \leq \alpha + 1$ в противоречие с выбором k.

2) Пусть теперь a нечетно. Пусть α_1 – наибольший из всех показателей, с которыми нечетные простые сомножители входят в разложение $a-1$. Положим $\nu_2\left(a^2-1\right) = \alpha_2$ (отметим, что $\alpha_2 \geq 3$ и α_2 конечно, так

---

[8] Здесь полагаем $\nu_p(0) = \infty$.

[9] Эту лемму или более общее утверждение упражнения 8 называют LTE-леммой (Lifting The Exponent – «подъем показателя») или леммой об уточнении показателя, а иногда – леммой Гензеля. Она является мощным средством для решения задач (см., например, решение задачи М2032 в «Кванте» №4 за 2007 г.). С ее помощью можно, например, следующим образом решить задачу М2212,а), явно указывая цепочки a-хороших чисел: если $a-1$ не равно степени 2, то любая степень простого нечетного делителя числа $a-1$ является a-хорошим числом; если же $a-1 = 2^k$, то a^4-1 делится на $4p$ (p – некоторое нечетное простое число), и тогда числа вида $4p^m$ – a-хорошие.

[10] Обратите внимание на отличие от случая нечетного p. Можно привести примеры, показывающие, что это отличие существенно.

как $a \ne \pm 1$). Пусть $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Выберем $k \ge \alpha + 2$ и предположим, что $n \in A_k(a)$, $n > 1$. По задаче 1, n делится на p, где p – некоторый простой делитель $a-1$. Если p нечетно, получаем противоречие так же, как и в случае 1). Предположим, что $p = 2$, $n = 2t$ и $\nu_2(t) = \beta$, $\beta \ge 0$. Тогда, согласно лемме 6, $a^n - 1 = \left(a^2\right)^t - 1$ не делится на $2^{\alpha+1+\beta}$. Но $a^n - 1$ должно делиться на $n^k = (2t)^k$, а следовательно, и на $2^{k+k\beta}$. Отсюда $k + k\beta \le \alpha + \beta$, следовательно, $\alpha \ge k + (k-1)\beta \ge k$ и $k \le \alpha$ в противоречие с выбором k.

Итак, в последней задаче показано, что при $a \ne \pm 1$ в последовательности множеств $A_1(a) \supset A_2(a) \supset \ldots$ на некотором шаге $A_k(a)$ становится равным $\{1\}$. Более точный ответ на вопрос о конечности или бесконечности множеств $A_k(a)$ при $a \ne \pm 1$ и $k \ge 3$ авторам не известен.[11] Идея продолжения цепочек чисел из $A_k(a)$ при $a \ge 3$ уже не работает: например, для бесконечно многих a имеется цепочка из двух чисел, принадлежащих $A_3(a)$ или $A_4(a)$, которую невозможно продолжить.

Упражнение 9. Докажите, что для каждого $k \ge 2$ найдется бесконечно много натуральных a таких, что $A_{k+1}(a) = \{1\}$, но $A_k(a)$ содержит некоторое $n > 1$.

Задача 6. $A_3(a) = \{1\}$ *тогда и только тогда, когда* $a-1$ *– нечетное свободное от квадратов число.*

Решение. Если $a-1$ четно, то $a^2 - 1$ делится на 8, значит, $2 \in A_3(a)$.

Пусть теперь $a-1$ нечетно, и $a-1$ делится на p^2, где p – некоторое нечетное простое. Тогда, по лемме 1, $a^p - 1 = (a-1)\left(a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1\right)$ делится на p^3, значит, $p \in A_3(a)$.

Пусть $a-1$ нечетно и свободно от квадратов. Предположим, что $n \in A_3(a)$, $n > 1$. Тогда, по задаче 1, $a-1$ делится на p (но не на p^2), где p – наименьший простой делитель n. Пусть $n = p^\beta x$, где x не делится на p, $\beta \ge 1$. Тогда, по лемме 5, $a^n - 1$ не делится на $p^{2+\beta}$. Но n^3 делится на $p^{3\beta}$. Отсюда $1 + \beta \ge 3\beta$ – противоречие.

[11] Есть основания предполагать, что $A_3(a)$ конечно для любого $a \ne \pm 1$ (ср. с задачей М2212).

Упражнения

10. Докажите, что а) $A_3(3) = \{1, 2\}$; б) $A_3(5) = \{1, 2\}$.

11. Докажите, что для каждого p найдется $a > 1$ такое, что для бесконечного множества натуральных n НОД$\left(a^n - 1, n^3\right) \ge pn^2$.

Делимость $a^n + 1$ на степени n

Определим множество $A_k^+(a)$ как множество натуральных n таких, что $a^n + 1$ делится на n^k. В заключение мы предлагаем в виде упражнений ряд утверждений о множествах $A_k^+(a)$. Большинство этих упражнений решается с помощью идей, изложенных выше. Это происходит хотя бы потому, что нечетные числа множества $A_k^+(a)$ – это в точности нечетные числа множества $A_k(-a)$.

Упражнения

12. Для любого $a > 1$ множество $A_1^+(a)$ бесконечно, причем если $a \ne 2^k - 1$, то $A_1^+(a)$ содержит бесконечно много нечетных чисел.

13. Если $a = 2^k - 1$, то все числа $n > 1$ из множества $A_1^+(a)$ – четные.

14. а) Докажите, что при $a = 2^k - 1$ справедливо $A_2^+(a) = \{1\}$, и обратно, если $a \ne 2^k - 1$, то $A_2^+(a)$ содержит некоторое $n > 1$.

б) Если $a = 2^k - 1$, где $k > 1$, то найдется $n > 1$, для которого $a^{2n} + 1$ делится на $2n^2$.

15. а) Если $a \ge 3$, $a \ne 2^k - 1$, то $A_2^+(a)$ бесконечно.

б) Если $a = 2^k - 1$, где $k > 1$, то существует бесконечно много n, для которых $a^{2n} + 1$ делится на $2n^2$.

16. Пусть $a \ge 3$. Тогда а) $A_1^+(a)$ содержит бесконечно много свободных от квадратов чисел;

б) при $a \ne 2^k - 1$ множество $A_2^+(a)$ содержит бесконечно много свободных от квадратов чисел.

17. Пусть $n \in A_1^+(2)$ и $n > 3$. Докажите, что n делится на 9.

18 (Международная математическая олимпиада, 1990 г.). Докажите, что $A_2^+(2) = \{1, 3\}$.

19. а) Пусть натуральные $a > 3$ и b таковы, что $2^a + 1$ делится на b, а $2^b + 1$ делится на a. Докажите, что ab делится на 27.

б) Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (a, b) таких, что $2^a + 1$ делится на b, $2^b + 1$ делится на a, но ab не делится на 81.

НАМ ПИШУТ

Еще раз об описанных четырехугольниках

Приведем короткое решение следующей популярной задачи.[1]

Задача 1. *а) В треугольнике ABC на стороне BC взяты точки D и E. Докажите, что если окружности, вписанные в треугольники ABD и ACE, равны, то и окружности, вписанные в треугольники ABE и ACD, также равны (рис.1).*

б) В треугольнике ABC на стороне BC взяты точки D и E. Пусть K – точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, вписанным в треугольники ABD и ACE. Докажите, что K также является точкой пересечения общих внешних касательных к окружностям, вписанным в треугольники ABE и ACD (рис.2).

[1] Это решение было опубликовано в 1989 году в журнале Mathematics Magazine (см. статью: H.Demir, C.Tezer. «More on incircles»).

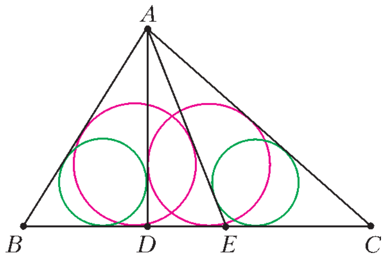


Рис. 1

Решение. В некотором смысле пункт б) обобщает пункт а). Приведем решение пункта б). Нетрудно видоизменить это решение так, чтобы оно работало для пункта а).

Пусть, скажем, точки на прямой BC следуют в порядке K, B, D, E, C (рис.3). Пусть касательная к вписанным окружностям треугольников ABD и ACE, проведенная из K (и отличная от прямой BC), пересекает AB, AD, AE, AC в точках B_1, D_1,

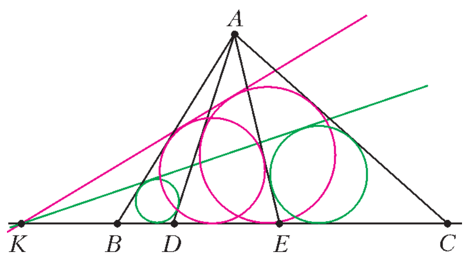


Рис. 2

E_1, C_1 соответственно. Пусть ω – окружность, вписанная в треугольник AD_1E_1. Проведем из K касательную к окружности ω (отличную от прямой B_1C_1), пусть она пересекает AB, AD, AE, AC в точках B_2, D_2, E_2, C_2. Тогда, согласно известной задаче (задача М1025 «Задачника «Кванта», она

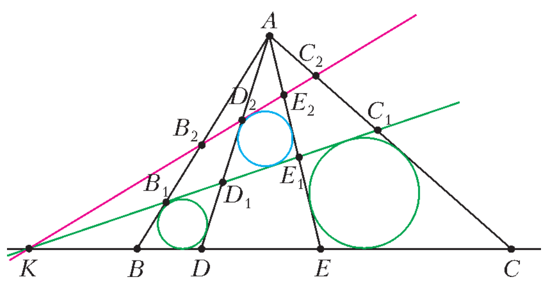


Рис. 3

обсуждалась, например, в статье Н.Белухова и П.Кожевникова «Описанные четырехугольники и ломаные» в «Кванте» №1 за 2010 год, задача 5), четырехугольники BEE_2B_2 и CDD_2C_2 описанные, откуда и вытекает утверждение задачи.

Н.Белухов обобщил задачу 1 для описанного четырехугольника таким образом.

Задача 2. *В описанном четырехугольнике ABCD на сторонах BC и CD взяты точки E и F. Пусть ω_b и ω_d – окружности, вписанные в треугольники ABE и ADF, γ_b – окружность, касающаяся отрезков AB, BC, AF, а γ_d – окружность, касающаяся отрезков AD, DC, AE (рис.4).*

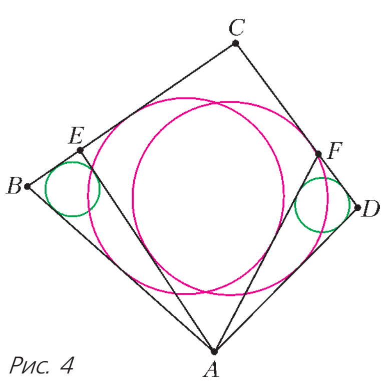


Рис. 4

а) Докажите, что окружности ω_b и ω_d равны тогда и только тогда, когда окружности γ_b и γ_d равны.

б) Пусть K – точка пересечения общих внешних касательных к окружностям ω_b и ω_d. Докажите, что K также является точкой пересечения общих внешних касательных к окружностям γ_b и γ_d (рис.5).

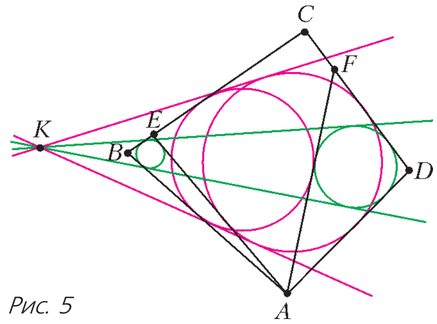


Рис. 5

Решение. Приведем решение задачи б). Здесь помимо идей, которые нам уже встретились, понадобится теорема о трех гомотетиях.

Пусть L – точка пересечения общих внешних касательных к окружностям γ_b и γ_d. Обозначим через Ω окружность, вписанную в четырехугольник $ABCD$.

Заметим, что B, D и K – центры трех гомотетий с положительными коэффициентами, переводящих, соответственно, окружность ω_b в Ω, Ω в ω_d, ω_d в ω_b. Поэтому (по теореме о трех гомотетиях) точки B, D и K лежат на одной прямой. Аналогично (заменяя пару окружностей ω_b и ω_d на пару γ_b в γ_d) получаем, что точки B, D и L лежат на одной прямой.

Пусть касательная из точки C к окружности ω_b пересекает отрезок EA в точке X (рис.6). Тогда четырехугольник $AXCD$

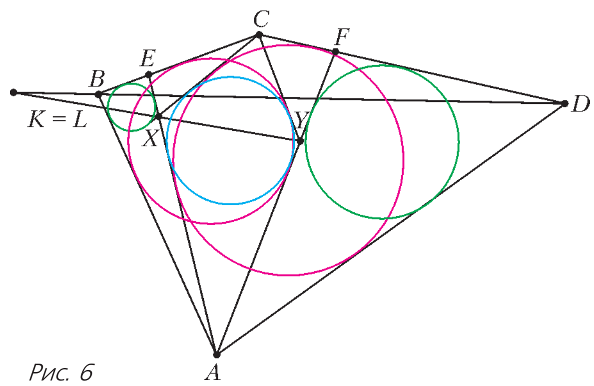


Рис. 6

описанный (см., например, задачу 2 из статьи «Описанные четырехугольники и ломаные»), т.е. CX касается γ_d. Аналогично, существует общая касательная к окружностям ω_d и γ_b, проходящая через C; пусть она пересекает FA в точке Y.

Далее, четырехугольник $XCYA$ описанный (это снова следует из задачи 2 из статьи «Описанные четырехугольники и ломаные», применяем ее для четырехугольника $ABCY$), пусть он описан около окружности ω.

Заметим, что X, Y и K – центры трех гомотетий, переводящих, соответственно, окружность ω_b в ω (с отрицательным коэффициентом), ω в ω_d (с отрицательным коэффициентом), ω_d в ω_b (с положительным коэффициентом). Поэтому X, Y и K лежат на одной прямой. Аналогично, X, Y и L – центры трех гомотетий с положительными коэффициентами, переводящих, соответственно, γ_d в ω, ω в γ_b, γ_d в γ_b. Поэтому точки X, Y и L лежат на одной прямой.

В том случае когда прямые BD и XY не совпадают, задача решена: точки K и L совпадают с точкой пересечения прямых BD и XY. Случай совпадения прямых XY и BD может быть разобран отдельно либо сведен к уже рассмотренному (скажем, с использованием соображений непрерывности).

А.Скутин

Перо птицы и воздушный полет

Г.УСТЮГИНА, Ю.УСТЮГИН

Сегодня мало найдется людей, которые не летали бы на самолетах. Все понимают, как удобно за несколько часов полета оказаться в другом месте земного шара, расположенном за многие тысячи километров от места вылета. Конечно, перелет – это не всегда приятно, а иногда даже опасно для жизни. Но люди продолжают пользоваться самолетами для дальних и длительных перелетов.

А как летают птицы? Можно сказать – очень просто. Взмахнули крыльями и взлетели, а дальше – свободный полет с головокружительными виражами. Человек понемногу, по мере понимания, выделяет из полета птицы отдельные элементы и «пристраивает» к своим летательным аппаратам. И эти летающие куски металла становятся все более «умными». По крайней мере, так человеку хочется думать. А птицы по-прежнему летают, не обращая внимания на пристальные людские взгляды. Им все равно, понимаем мы что-то в их полетах или нет, и они не требуют благодарности за подсказки. Однако давайте воспользуемся одной из таких подсказок и посмотрим внимательнее на устройство пера птицы.

Во время линьки обычный городской голубь многократно теряет свои перья, поэтому в городе нет необходимости проводить специальный их поиск. Перья, лежащие на дорожках и газонах, очень часто во время прогулки попадают в наше поле зрения. На рисунке 1 приведены фотографии найденных перьев голубя, вороны и сокола, а на рисунке 2 представлена подборка перьев городской вороны (расположенных в некотором порядке, о котором речь пойдет позже).

Что нам сообщают биологи о крыльях и перьях? Оказывается, кости птичьего крыла (рис.3) в принципе те же, что и в человеческой руке. Плечевая кость, единственная в верхнем отделе конечности, в локтевом суставе сочленена с двумя костями предплечья – лучевой и локтевой. Ниже, т.е. в кисти, многие элементы, присутствующие у человека, у птиц слиты между собой или утрачены, так что остаются всего две косточки запястья – одна крупная пястнозапястная кость, или пряжка, и четыре фаланговые косточки, соответствующие трем пальцам. Летательные перья, отходящие от кисти, называются первостепенными (большими), т.е. маховыми перьями первого порядка, а прикрепленные в зоне локтевой кости предплечья – второстепенными (малыми), т.е. маховыми перьями второго порядка. Тогда выходит, что на рисунке 1 приведены маховые перья второго порядка, а на рисунке 2 (в порядке следования сверху вниз) – два маховых пера первого порядка и три маховых пера второго порядка.

Рис. 1

Рис. 2

Давайте посмотрим внимательно на маховое перо голубя (рис.4). Оно играет очень важную роль для полета птицы: маховые движения крыльями позволяют осуществлять далекие перелеты на тысячи километров. Перо имеет ствол *1*, на котором держится опахало *2*. Опахало асимметрично делится стволом на две части – внешнее *4* и внутреннее *3* опахала. Внешнее опахало всегда несколько уже, чем внутреннее. Зададимся вопросом: а, собственно, почему? Ведь в природе ничего просто так не бывает.

Если рассечь перо плоскостью, перпендикулярной стволу пера в некоторой точке в центральной области опахала, то получим сечение пера, которое показано на рисунке 5. Ствол пера – соответствующее ему сечение показано в точке B – является линией жесткости пера,

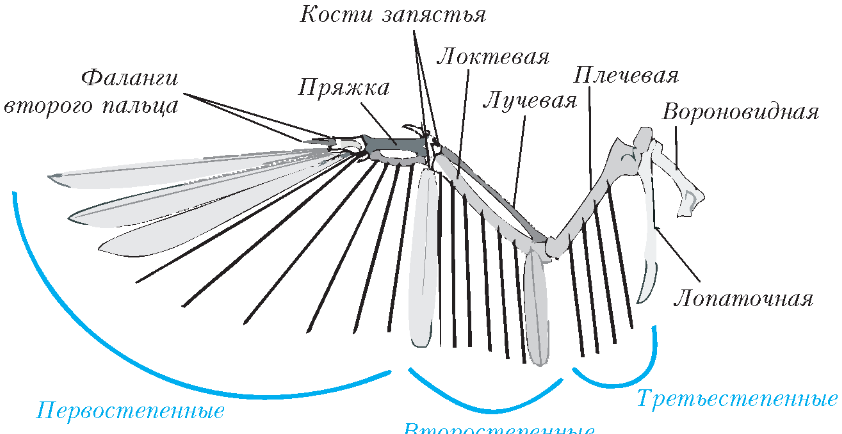


Рис. 3

а сама точка B на разрезе будет точкой жесткости пера. Иными словами, при ударе крылом вверх или вниз все перо будет иметь ось вращения, закрепленную во

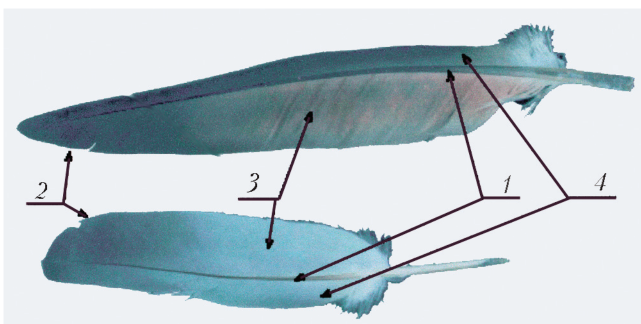


Рис. 4

множестве точек B, расположенных вдоль крыла по некой кривой линии, которую представляет собой ствол пера. Выполним несложные измерения, которые можно осуществить с помощью даже простой линейки. Измерим ширину опахала $AC = l$, а также внешней $AB = a$ и внутренней CB частей опахала. При этом точке O будет соответствовать середина интервала: $AO = l/2$, будем ее называть геометрическим центром. Поскольку перо очень легкое, гибкое и почти плоское, центр приложения аэродинамических сил – сил реакции среды – можем считать совпадающим с его геометрическим центром. Из полученных данных легко вычисляется величина b, равная длине отрезка BO. Если определить отношение $u = b/l$ для различных точек на стволе в части, несущей опахало, то оказывается, что эта величина постоянная, т.е. она не зависит ни от точки ее измерения на стволе пера, ни от того, чье это перо. Замерам подвергались маховые перья городского голубя, вороны, орла и чайки, и это число регулярно принимало значение в интервале 0,27–0,30.

Однако, глядя на рисунок 2, мы видим, что перья крыла имеют различные расположения ствола и опахала. Это наблюдение привело к необходимости выполнить не избирательные, а сплошные определения значений величины u. Измерению подвергались маховые перья первого и второго порядков, а также перья хвоста вороны и голубя. Всего было шесть перьев – по три на каждую птицу. Опахало пера делилось по длине на четыре равные части. Измерения выполнялись в трех точках сечений пера: $\frac{1}{4}L$, $\frac{1}{2}L$ и $\frac{3}{4}L$, где L – длина опахала (начало отсчета – от кончика пера, противоположного очину). Определялась величина $u = b/l$, где $b = k - l/2$, а $k = BC$ (см. рис.5). По измерениям вычислялись: среднее арифметическое значение величины $m = \Sigma u_i / n$, среднее квадратичное отклонение $s = \sqrt{\Sigma (u_i - m)^2 / (n-1)}$ и средняя квадратичная ошибка среднего арифметического $s' = s/\sqrt{n}$, где n – число точек замера. Результаты вычислений представлены на рисунке 6.

Для первых маховых перьев вороны величина u принимает значение от 0,4 на кончике пера, где ствол

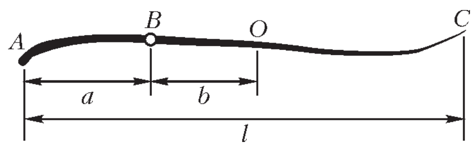


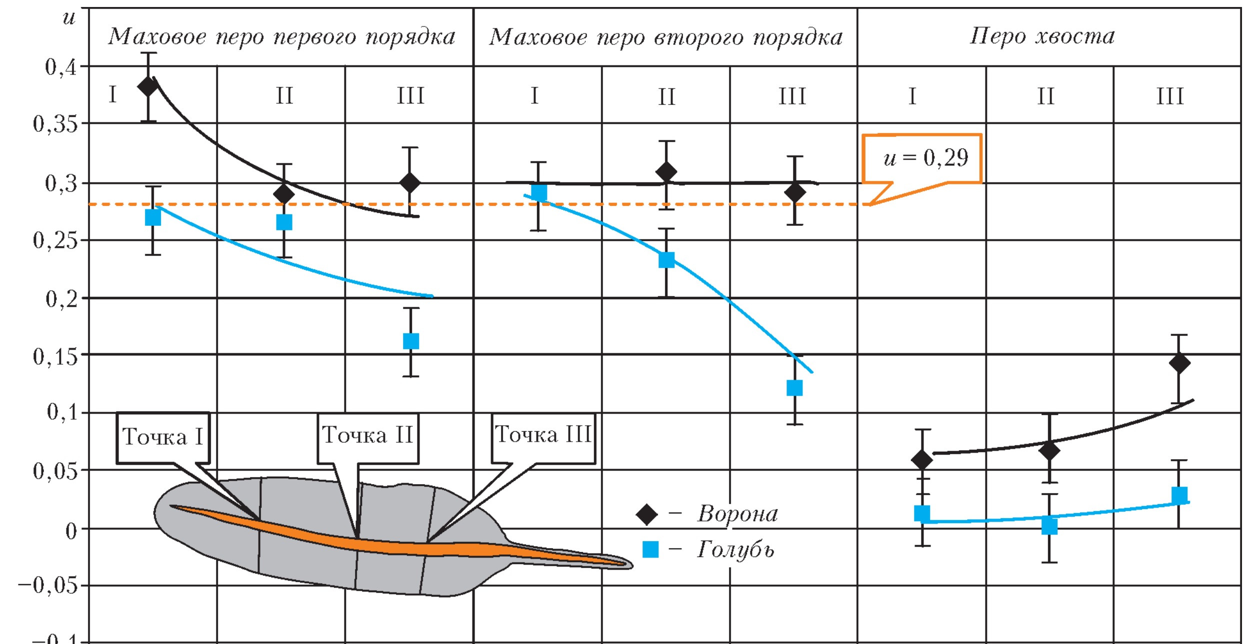
Рис. 5

максимально приближен к передней части пера, до 0,29 в средней части в области максимальной ширины пера. Последующие маховые перья имеют значения u от 0,29 в оконечной половине пера до 0,22 в части, ближайшей к очину. Перья, ближайшие к телу птицы, и хвостовые перья имеют значения, близкие к 0,1. А перья хвоста фактически имеют симметрично разделенное стволом опахало и значение u, близкое к нулю. Для маховых перьев голубя тоже характерно значение u, близкое к 0,29. Значение u = 0,16 для первого махового пера голубя вызвано грубой ошибкой отдельного измерения. Исключение этого измерения дает значение u = 0,25 и приближает результат к значению 0,29. Перья хвоста дают значение u, близкие к нулю.

Оказывается, перья или части пера, имеющие значение величины $u > 0{,}29$, служат созданию силы тяги. Перья со значениями u, близкими к нулю, обеспечивают планирующий полет. Перья со значениями u в интервале от 0 до 0,29 служат как созданию силы тяги – это целиком само перо или концевая часть пера, так и планирующему полету с созданием подъемной силы – это часть пера, ближайшая к очину.

Особое значение имеют перья первого порядка. В них часть пера, ближайшая к очину, ответственна за создание силы тяги. А для чего нужна другая, оконечная, часть пера? Для нее величина u принимает значение, близкое к 0,40. В этой части перо максимально асимметрично – в нем очень узкая внешняя часть опахала и максимально широкая внутренняя часть. Такое расположение ствола и середины опахала способствует тому, что при взмахе или при ударе вниз перо может быстро менять угол атаки.

Если обратиться к данным биологии, то оказывается, что перьевые сумки, в которых маховые перья закреплены своими очинами, представляют собой последовательную цепочку сумок, соединенных кожей. В резуль-



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
◆ Ряд 1	0,383	0,287	0,3	0,287	0,307	0,293	0,057	0,07	0,137
■ Ряд 2	0,267	0,263	0,16	0,287	0,23	0,12	0,013	0	0,033

$n = 1, 2, \ldots, 8, 9$ (число точек замера)

Рис. 6

тате птица, меняя угол атаки первых перьев, получает возможность (за счет их резкого совместного вращения) либо быстро одновременно перекрывать основные маховые перья при ударе вниз, либо быстро одновременно раскрывать их и задавать углы атаки при взмахе крыла. Это мы назвали эффектом жалюзи. И в том и другом случае перья функционируют так, что возникает сила тяги. Поскольку при этом используется энергия поступательного движения всего тела и его инерционность, у птицы снимается необходимость иметь дополнительные мышцы в структуре крыла, отвечающие за управление положением каждого махового пера в полете.

Кроме того, в полете, особенно парящем, птице нет необходимости действовать так, чтобы постоянно держать мышцы крыла в напряженном, расправляющем крыло, состоянии. Веероподобное расположение перьев приводит к тому, что возникающая сила тяги перьев направлена не только вперед, но и несколько в сторону – в результате возникает эффект растягивания крыла в сторону. Это тоже очень предусмотрительное природное решение задачи экономичного удержания тела птицы в воздухе.

Человеку остается лишь научиться использовать эти подсказки природы.

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Как быстрее падать?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

…Рассмотрим такую задачу. Пусть тело массой M удерживается на уровне перекладины высоко над поверхностью земли. К телу привязан канат массой m и длиной l, второй конец которого закреплен на перекладине. В начальный момент канат свешивается с перекладины так, как это показано на рисунке 1. Затем тело отпускают, и через некоторое время оно оказывается на расстоянии x под перекладиной, как это изображено на рисунке 2. Найдем скорость v тела в этот момент, исходя из закона сохранения механической энергии.

До того как тело начало падать, механическая энергия системы «тело–канат» относительно уровня перекладины была равна потенциальной энергии каната $E_{п} = -mgl/4$. В момент времени, соответствующий положению тела на рисунке 2, потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии опустившегося тела $E_{п1} = -Mgx$, потенциальной энергии левой части каната $E_{п2} = -mg(l-x)(l+3x)/(8l)$ и потенциальной энергии правой части каната $E_{п3} = -mg(l+x)^2/(8l)$. Кинетическая энергия в этот момент времени складывается из кинетической энергии падающего тела $E_{к1} = Mv^2/2$ и кинетической энергии левой части каната (правая часть неподвижна!) $E_{к2} = m(l-x)v^2/(4l)$. В соответствии с законом сохранения энергии, для квадрата

(Продолжение см. на с. 23)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2012» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2246» или «Ф2253». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvantjournal.ru и phys@kvantjournal.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2248а, М2249–М2253 предлагались на XXXIII Турнире городов.

Задачи М2246–М2253, Ф2253–Ф2259

М2246. Перед нами две чашки, в них кофе с молоком. В первой чашке больше кофе, чем молока, а в двух чашках вместе молока и кофе поровну. Можно ли за несколько переливаний добиться того, чтобы в первой чашке оказалось больше молока, чем кофе?

Фольклор

М2247. При каких $n>1$ из равенства $x_1^{x_2}=x_2^{x_3}=\ldots=x_n^{x_1}$ следует $x_1=x_2=\ldots=x_n$ ($x_1,\ldots,x_n$ – положительные числа)?

В.Сендеров

М2248. а) В вершинах 33-угольника записали в некотором порядке целые числа от 1 до 33. Затем на каждой стороне написали сумму чисел в ее концах. Могут ли на сторонах оказаться 33 последовательных целых числа (в каком-нибудь порядке)?
б) Тот же вопрос для 32-угольника.

Н.Авилов

М2249. На плоскости даны 10 прямых общего положения (нет параллельных и никакие три не проходят через одну точку). При каждой точке пересечения выбирается наименьший угол, образованный проходящими через нее прямыми. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих углов.

Р.Женодаров

М2250. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – основания высот из вершин A, B, C, точки C_A и C_B – проекции C_1 на AC и BC соответственно. Докажите, что прямая C_AC_B делит пополам отрезки C_1A_1 и C_1B_1.

Фольклор

М2251. По прямому шоссе со скоростью 60 км/ч едет машина. Недалеко от дороги стоит 100-метровый забор, параллельный дороге. Каждую секунду пассажир автомобиля измеряет угол, под которым виден забор. Докажите, что сумма всех измеренных им углов меньше 1100 градусов.

А.Шень

М2252. Докажите, что число $1^1+3^3+5^5+7^7+9^9+\ldots$ $\ldots+\left(2^n-1\right)^{2^n-1}$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.

С.Сафин

М2253*. 100 красных точек разделили синюю окружность на 100 дуг, длины которых являются всеми натуральными числами от 1 до 100 в произвольном порядке. Докажите, что существуют две перпендикулярные хорды с красными концами.

В.Произволов

Ф2253. В Москве 08 февраля 2011 года, в середине временно́го промежутка от зимнего солнцестояния до весеннего равноденствия, было принято решение об отмене перехода на сезонное время. На сколько градусов в полдень этого дня Солнце отклонялось от зенита? Насколько точно для этого дня выражение «в полдень Солнце висит над головой и печет ее»?

Д.Медведев

Ф2254. На тело, которое в начальный момент имело скорость $\vec{v}$, начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$. Спустя время τ величина скорости тела стала равной $v/2$. За следующий такой же интервал времени модуль скорости уменьшился еще в два раза. Определите, в какой момент времени t_1 вектор скорости тела будет перпендикулярен вектору начальной скорости. Чему будет равна по величине скорость тела спустя интервал времени 3τ с начала действия силы? Через какое время t_2 с момента начала действия силы скорость тела по модулю снова будет равна v? Чему равна масса M тела?

Фольклор

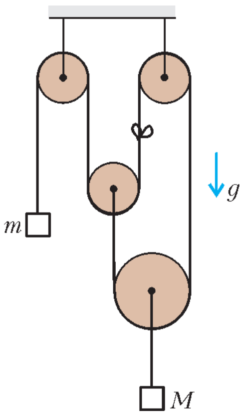


Рис. 1

Ф2255. С каким ускорением движется узелок на невесомой и нерастяжимой нити в механической системе, изображенной на рисунке 1? Массы грузов m и M известны, трения в блоках нет, блоки невесомы, а свободные участки нити вертикальны.

Фольклор

Ф2256. Расстояние от Солнца С до Венеры В составляет примерно 0,7 а.е., где 1 а.е. – это расстояние от Земли З до Солнца С. Орбиты планет можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости. При каком значении угла φ, составленного отрезками ЗС (соединяющего центры Земли и Солнца) и СВ (соединяющего центры Солнца и Венеры), Венера кажется наиболее яркой?

Астрономический фольклор

Ф2257. Невесомый жесткий шкив блока имеет внешний радиус R и радиус отверстия r. Этот шкив насажен на закрепленную горизонтальную жесткую ось с диаметром, немного меньшим, чем $2r$. Через шкив блока перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами m и M (рис.2). Свободные участки нити, не лежащие на шкиве блока, вертикальны. Между шкивом и осью имеется трение, характеризующееся коэффициентом μ. С какими ускорениями движутся грузы? Рассмотрите разные начальные условия.

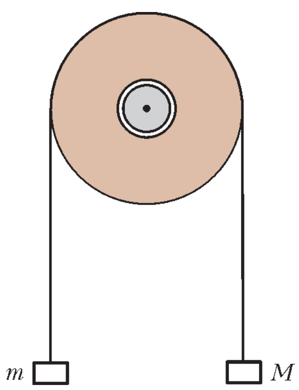


Рис. 2

С.Варламов

Ф2258. Шприц емкостью $V_0 = 12$ см^3 подготовлен для «газового» эксперимента. Шприц заполнен воздухом при атмосферном давлении p_0, и отверстие, к которому прикрепляется игла, герметизировано резиновым колпачком. Поршень шприца перемещается вдоль стенок корпуса с трением, и можно считать, что сила трения не зависит от направления перемещения поршня относительно стенок. Шприц поместили в сосуд и создали в этом сосуде давление, избыточное по сравнению с атмосферным. При этом минимальный объем заключенного внутри шприца воздуха был $V_1 = 2{,}5$ см^3. Затем давление в сосуде вновь вернули к атмосферному, а объем воздуха, запертого внутри шприца, стал $V_2 = 10$ см^3. На сколько максимальное давление в сосуде было больше по сравнению с атмосферным давлением? Считайте температуру неизменной.

С.Дмитриев

Ф2259. У идеального трансформатора есть два обмотки с нулевыми сопротивлениями, которые имеют N и $3N$ витков. Если выводы обмотки с большим числом витков подключают к источнику переменного напряжения $u = U_0 \cos \omega t$, то амплитуда тока холостого хода, когда к выводам второй обмотки ничего не подключают, равна I_0. Этот трансформатор включили в схему, изображенную на рисунке 3. ЭДС идеальной батарейки как раз равна U_0. Сопротивление резистора равно R. Ключ замыкают на время τ, а затем размыкают. Как зависят показания идеальных амперметров A_1 и A_2 от времени? Постройте графики этих зависимостей.

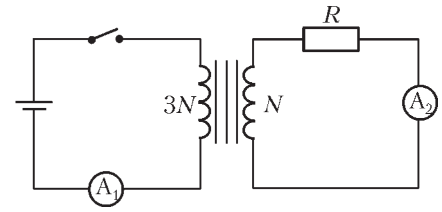


Рис. 3

А.Коршиков

Решения задач М2229–М2235, Ф2235–Ф2242

М2229. *По кругу написаны все целые числа от 1 по 2010 в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух чисел, стоящих рядом, четна.*[1]

Пусть все разности рядом стоящих чисел нечетны. Тогда четные и нечетные числа по кругу чередуются. Но это значит, что либо каждое четное число больше обоих соседних нечетных, либо каждое четное число меньше обоих соседних нечетных. В первом случае не найдется места для числа 2, а во втором – для числа 2010. Противоречие.

Б.Френкин

М2230. *Грани выпуклого многогранника – подобные треугольники. Докажите, что многогранник имеет две пары равных граней (одну пару равных граней и еще одну пару равных граней).*

Если все ребра многогранника равны, то, очевидно, равны и все его грани, а поскольку их не меньше четырех, найдутся и две нужные нам пары равных граней.

Если же не все ребра многогранника равны, то искомыми будут пара граней, примыкающих к наименьшему ребру, и пара граней, примыкающих к наибольшему ребру. Если какая-то из граней входит в обе пары, то наибольшее и наименьшее ребра входят в одну грань. Но тогда никакая грань не может быть больше этой (иначе в ней найдется большее ребро) и, аналогично, не может быть меньше. Значит, все грани равны, и мы приходим к случаю, рассмотренному вначале.

В.Произволов

М2231. *Решите в натуральных числах уравнение* $x^x = y^{3y}$.

[1] К сожалению, в формулировке этой задачи в «Кванте» №4 за 2011 год была допущена ошибка. Здесь приведена верная формулировка.

Ответ: $(1;1)$, $(8;4)$.
Если $x = y$, получаем $x^x = \left(x^3\right)^x$, $x = x^3$, значит, $x = 1$.
Если $x \geq 3y$, то $x^x \geq (3y)^{3y} > y^{3y}$ – противоречие, значит, $x < 3y$.
Разложим x и y на простые множители: $x = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$, $y = p_1^{l_1} \ldots p_n^{l_n}$, где $p_1, \ldots, p_n$ – попарно различные простые числа, а k_i и l_i – целые неотрицательные числа. Из равенства $x^x = y^{3y}$ получаем $xk_i = 3yl_i$, откуда $\frac{k_i}{l_i} = \frac{3y}{x} > 1$. Значит, при каждом i имеем $k_i > l_i$, поэтому x делится на y. С учетом неравенства $x < 3y$ получаем, что $x = 2y$. Имеем

$$(2y)^{2y} = y^{3y} \Leftrightarrow (2y)^2 = y^3 \Leftrightarrow 4y^2 = y^3 \Leftrightarrow y = 4.$$

Другое решение можно получить из следующего утверждения: если степени натуральных чисел a и b равны, то a и b являются степенями одного и того же натурального числа.

П.Осипов, В.Сендеров

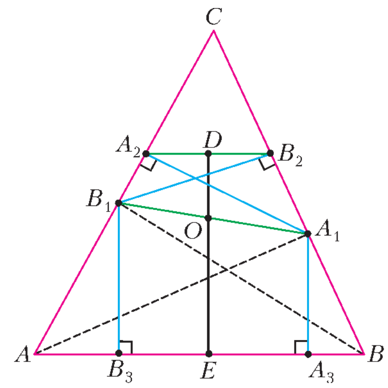
М2232. *В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечетное число главных дорог.*

Разобьем все города на пары и соединим каждую пару своим маршрутом. Посчитаем для каждой дороги *кратность*: число маршрутов, в которые она вошла. Сумма кратностей для выходящих из города дорог нечетна: свой маршрут дает вклад 1, а остальные дают 0 или 2. Значит, из каждого города выходит нечетное число дорог нечетной кратности, следовательно, достаточно объявить главными все дороги нечетной кратности.
Замечание. В условии задачи можно зафиксировать некоторое подмножество A из четного числа городов. В таком случае можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города, входящего в множество A, выходило нечетное число главных дорог, а из каждого города, не входящего в множество A, – четное. Доказать это обобщение можно так же (разбивая на пары города множества A).

А.Шень

М2233. *Дан остроугольный треугольник ABC; AA_1, BB_1 – его высоты. Из точки A_1 опустили перпендикуляры на прямые AC и AB, а из точки B_1 опустили перпендикуляры на прямые BC и BA. Докажите, что основания перпендикуляров образуют равнобокую трапецию.*

Пусть A_1A_2 и A_1A_3 (B_1B_2 и B_1B_3) – перпендикуляры, опущенные из точки A_1 (B_1) на прямые AC (BC) и AB соответственно (см. рисунок). Как известно, треугольник B_1CA_1 подобен треугольнику ABC. Треугольник A_2CB_2, соответственно, подобен треугольнику B_1CA_1, а значит, и треугольнику ABC. Поэтому прямые A_2B_2 и AB параллельны, т.е. $A_2B_2A_3B_3$ – трапеция.



Опустим перпендикуляры OD и OE из середины O отрезка A_1B_1 на основания трапеции A_2B_2 и A_3B_3. Так как углы $A_1A_2B_1$ и $B_1B_2A_1$ прямые, O – центр окружности, описанной около четырехугольника $B_1A_2B_2A_1$. Поэтому D – середина A_2B_2. Отрезок OE параллелен основаниям трапеции $A_1A_3B_3B_1$ и потому является ее средней линией. Значит, E – середина A_3B_3. Таким образом, трапеция $A_2B_2A_3B_3$ симметрична относительно DE и, следовательно, равнобока.

Л.Медников, А.Шаповалов

М2234. *В пространстве с декартовой системой координат дан прямоугольный параллелепипед, вершины которого имеют целочисленные координаты. Его объем равен 2011. Докажите, что ребра параллелепипеда параллельны координатным осям.*

По теореме Пифагора длины ребер равны $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, где числа $a \leq b \leq c$ натуральны. Тогда квадрат объема $2011^2 = abc$. Поскольку 2011 – простое число, то $a = 1$. Для b и c возможны два случая: $b = 1$, $c = 2011$ или $b = c = \sqrt{2011}$. Ребро длины 1 идет, очевидно, по линии сетки. В случае $a = b = 1$ ребро c перпендикулярно двум линиям сетки и поэтому тоже идет по сетке. В случае $b = c$ ребра b и c лежат в плоскости, перпендикулярной линиям сетки. Но тогда 2011 должно представляться как сумма двух квадратов. Однако 2011 имеет остаток 3 по модулю 4, а для суммы квадратов такое невозможно.

Л.Медников, А.Шаповалов

М2235. *Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 всем известных гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма?*

Ответ. Могут.
Пусть множество программистов описывается множеством всевозможных строк из 11 неотрицательных целых чисел с суммой 100. Гении – те, у кого все эти числа, кроме одного, нулевые (а ненулевое равно 100).

Ясно, что гениев ровно 11. Объявим знакомыми тех, у которых две «координаты» отличаются на 1 (одна больше на 1, другая меньше на 1), а остальные совпадают.

Покажем, как второй фирме нанять 10 гениев. Пусть $A = (A_1, A_2, \ldots, A_{11})$ – строка первого программиста, нанятого первой фирмой. В этой строке есть число не меньше 10 (пусть для определенности это A_{11}). Тогда вторая фирма нанимает программиста $B = (A_1 + 1, A_2 + 1, \ldots, A_{10} + 1, A_{11} - 10)$.

Пусть $M_i = \max C_i$ по всем строкам программистов $C = (C_1, C_2, \ldots, C_{11})$, нанятых на данный момент второй фирмой, а m_i – то же, но для первой фирмы. Наняв B, вторая фирма обеспечила неравенство $M_i > m_i$ для каждого $i \le 10$. Если вторая фирма сможет поддерживать своими ходами такие неравенства, то она раньше первой фирмы достигнет $M_i = 100$ (при всех $i \le 10$), т.е. наймет тем самым 10 гениев. Покажем, почему это возможно.

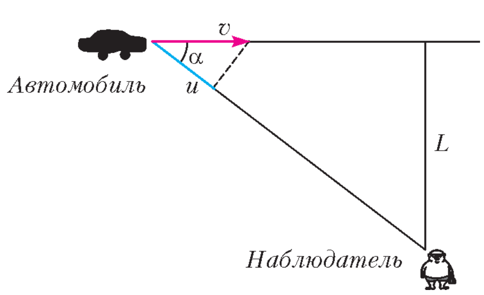
Из-за необходимости нанимать знакомых первая фирма может на каждом ходу увеличить не более одного из чисел m_i ($i \le 10$), причем не больше чем на 1, т.е. только одно из m_i может «догнать» M_i. Пусть такое равенство случилось, и после очередного хода первой фирмы $M_i = m_i = d < 100$. Значит, второй фирмой уже был нанят программист со строкой $S = (S_1, S_2, \ldots, S_{11})$, в которой $S_i = d$. Так как $d < 100$, $S_j > 0$ для некоторого $j \ne i$. Пусть $T = (T_1, T_2, \ldots, T_{11})$ – знакомый S, у которого $T_i = S_i + 1$, $T_j = S_j - 1$. Так как $T_i > d$, программист T еще никем не нанят. Наняв T, вторая фирма увеличит M_i и восстановит неравенство $M_i > m_i$.

Равенство $m_i = M_i = 100$ невозможно, так как i-е число равно 100 только у одной строки. Если равенства не случилось, то вторая фирма может ответным ходом увеличить на 1 любое $M_i < 100$ (для $i \le 10$). Если таких M_i нет, то 10 гениев уже наняты.

Л.Медников, А.Шаповалов

Ф2235. *По прямой дороге с постоянной скоростью v едет автомобиль. В некоторый момент времени автомобиль приближается к неподвижному наблюдателю со скоростью u ($u < v$). Через промежуток времени t после этого момента автомобиль оказывается ближе всего к наблюдателю. На каком расстоянии L от дороги находится наблюдатель?*

Сближение или удаление, т.е. уменьшение или увеличение расстояния между двумя небольшими телами (материальными точками) происходит со скоростью,



равной разности проекций скоростей этих тел на направление соединяющего их отрезка. Поскольку наблюдатель покоится, то его скорость и, соответственно, проекция скорости на этот отрезок равны нулю, а проекция скорости автомобиля в начальный момент равна u. Таким образом, угол α между скоростью $\vec{v}$ автомобиля и направлением «автомобиль–наблюдатель» в указанный момент времени такой, что $\cos\alpha = u/v$ (см. рисунок). За время t после этого автомобиль перемещается по дороге на расстояние vt, а расстояние между автомобилем и наблюдателем оказывается равным L, при этом $L/(vt) = \operatorname{tg}\alpha$. Отсюда следует ответ:

$$L = vt \operatorname{tg}\alpha = \frac{vt\sqrt{v^2 - u^2}}{u}.$$

А.Козлевич

Ф2236. *При стрельбе из игрушечного оружия пластиковыми шариками было установлено, что в пенопласт плотностью 40 кг/м^3 шарики углублялись в среднем на 15 мм, если выстрелы производились с малого расстояния – меньше 10 см. Если стрелять с дальности 6 м, то шарики застревают в пенопласте в среднем на глубине 3 мм. На какую глубину в среднем будут погружаться шарики в пенопласт, если стрелять с расстояния 2 м? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шарика, а сила сопротивления при движении шарика в пенопласте постоянна.*

При небольших расстояниях между местом вылета снаряда из ствола и мишенью можно не принимать во внимание действие на снаряд силы тяжести, а учитывать только силу сопротивления воздуха. В таком случае можно считать, что шарик движется по прямой линии только под действием силы сопротивления воздуха

$$F = -kv^2.$$

Умножив левые и правые части равенства на перемещение шарика Δx за небольшой промежуток времени, получим соотношение между работой силы сопротивления и изменением кинетической энергии шарика:

$$A = F\Delta x = \Delta E = -kv^2\Delta x = -k\frac{2E}{m}\Delta x,$$

или

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2k}{m}\Delta x.$$

Таким образом, малое изменение (уменьшение) кинетической энергии шарика ΔE пропорционально самой величине кинетической энергии E и малому отрезку пути Δx, пройденному шариком в воздухе. Такое уравнение имеет известное решение:

$$E(x) = E_0 \cdot \exp\left(\frac{-2kx}{m}\right).$$

В нашем случае E_0 соответствует углублению шарика в пенопласт на 15 мм при выстреле с малого расстояния ($x \to 0$).

Оставшаяся у шарика к моменту попадания в пенопласт кинетическая энергия идет на то, чтобы смять пенопласт, частично разрушить связи между частицами пенопласта и придать этим частицам кинетическую энергию. Плотность воздуха $\rho_{воз} = 1{,}3$ кг/м^3 примерно в 30 раз меньше плотности пенопласта $\rho_{пен} = 40$ кг/м^3, и если бы главную роль играли потери, связанные с динамикой частиц пенопласта, то шарик мог бы погрузиться в пенопласт на расстояние, примерно в 30 раз меньшее, чем он пролетает в воздухе. При дальности выстрела 6 м глубина погружения в пенопласт была бы порядка 20 см (а не 3 мм)! Следовательно, кинетической энергией, которую получают частицы пенопласта после прохождения мимо них шарика, можно пренебречь в сравнении с той энергией, которая на этом пути расходуется на разрушение пенопласта. Иными словами, при движении в пенопласте энергия шарика расходуется в основном на то, чтобы разрушить и смять пенопласт в объеме, пропорциональном глубине погружения шарика, что и соответствует постоянной силе сопротивления при движении шарика внутри пенопласта.

В результате получается система из двух уравнений:

$$15 \text{ мм} \cdot e^{-(K\cdot 6 \text{ м})} = 3 \text{ мм},$$

$$15 \text{ мм} \cdot e^{-(K\cdot 2 \text{ м})} = X,$$

где $K = 2k/m$. Выразив K из первого уравнения, подставим его значение во второе уравнение и найдем искомую глубину X:

$$X = \frac{15 \text{ мм}}{\sqrt[3]{15/3}} \approx 8{,}8 \text{ мм}.$$

Заметим, что полученный результат соответствует экспериментальным данным (9 ± 2) мм.

С.Найпер

Ф2237. *Масса пружины распределена равномерно по ее длине, начальная длина равна 1 м. Пружина «поджата» однородно, т.е. длина всех ее витков начинает одинаково увеличиваться при приложении к концам пружины двух противоположно направленных и равных по величине сил, причем только если их величины не меньше 100Н. При еще больших величинах сил изменение размеров пружины описывается законом Гука $k\Delta L = F$, где жесткость пружины $k = 500$ Н/м. Пружину потянули только за один конец вдоль ее оси с силой 200Н. Считая, что эксперимент происходит в космосе, найдите установившуюся длину пружины.*

Поскольку на пружину в космосе действует только одна сила, то пружина движется с ускорением, при этом средний виток пружины испытывает действие силы 100Н с одной стороны и немного большую силу с другой стороны. Иными словами, только половина витков пружины изменили свою длину, а те витки (половина от общего числа), со стороны которых сила к пружине *не* приложена, остались поджатыми. Причем относительная деформация витков пружины равна нулю в ее центре и максимальна вблизи конца, на который действует сила 200 Н. Относительное удлинение вблизи этого конца равно

$$\frac{F - F_{\min}}{kL_0} = \frac{200 \text{ Н} - 100 \text{ Н}}{500 \text{ Н/м} \cdot 1 \text{ м}} = 0{,}2.$$

В итоге установившаяся длина пружины будет равна

$$\frac{L_0}{2} + \frac{L_0}{2}\left(1 + \frac{0{,}2+0}{2}\right) = 0{,}5 \text{ м} + 0{,}5 \text{ м}\left(1 + \frac{0{,}2+0}{2}\right) = 1{,}05 \text{ м}.$$

В.Сергеев

Ф2238. *Планета состоит из однородного жидкого вещества, ускорение свободного падения на ее поверхности равно g. Найдите давление в центре этой планеты и в точке внутри объема, от которой до точек на поверхности планеты минимальное расстояние в N раз меньше максимального расстояния. Собственного вращения планеты по отношению к далеким звездам нет, атмосфера на планете отсутствует.*

Предположим, что планета имеет радиус R и что материал, из которого она состоит, имеет плотность ρ. Ускорение свободного падения в центре планеты (шара) равно нулю, а на поверхности (уединенного шара с постоянной плотностью) оно равно

$$g = G\frac{4/3\pi R^3\rho}{R^2} = \frac{4G\pi R\rho}{3}.$$

При погружении внутрь шара ускорение свободного падения убывает линейно с расстоянием. Это легко доказать, используя теорему Гаусса или учитывая то обстоятельство, что сферическая оболочка постоянной толщины внутри себя не создает гравитационного поля. Давление внутри планеты растет с глубиной погружения, и в самом центре оно равно

$$p_ц = \Sigma\rho g(x)\Delta x = \frac{\rho g R}{2}$$

(расчет суммы сводится к «геометрической» задаче нахождения площади треугольника). В выражение для давления, как видно, вошло произведение ρR, которое можно выразить через g и G, тогда получим

$$p_ц = \frac{3g^2}{8\pi G}.$$

В точке внутри объема планеты, минимальное расстояние от которой до поверхности h задано условием задачи: $(2R - h)/h = N$, давление меньше, чем в центре, и расчет увеличения давления от точки на поверхности до выбранной точки на глубине h сводится к «геометрической» задаче вычисления площади трапеции. Математические подробности вычисления мы опустим и сразу запишем результат:

$$p_т = \frac{2\rho g R N}{(N+1)^2}.$$

И в этом выражении произведение ρR выразим через g и G и получим

$$p_т = \frac{3Ng^2}{2\pi G(N+1)^2}.$$

Заметим, что при $N = 1$ эта точка находится в центре планеты и выражение для давления в точности совпадает с тем, что получено раньше.

С.Варламов

Ф2239. *Полярники в Антарктиде пробурили в толстом слое льда, покрывающего землю, глубокую скважину и опустили в нее лампочку накаливания мощностью 1000 Вт и пластиковую трубку для откачивания жидкой воды, получающейся в результате таяния льда. Лампочка посылает свет равномерно по всем направлениям. Лед мутный, и свет целиком поглощается в слое небольшой толщины – меньше 1 см. На той глубине, где находится лампочка, в толще льда температура постоянна и равна $-10\ ^\circ\text{C}$. Теплопроводность льда составляет 2,2 $\text{Вт}/(\text{К}\cdot\text{м})$. Через большое время размеры оттаявшей области, которая имеет форму шара (лампочка в его центре), установились. Каков радиус этого шара?*

В том случае когда размер полости уже установился, поток мощности W от лампочки равен потоку тепла через лед из этой области в окружающие слои льда. На расстоянии x от лампочки поток тепла равен площади поверхности шара радиусом x, умноженной на теплопроводность льда λ и на «скорость изменения» температуры с расстоянием $\Delta T/\Delta x$. Получается такое соотношение:

$$-4\pi x^2\lambda\frac{\Delta T}{\Delta x} = W\,,$$

или

$$-\Delta T = \frac{W}{4\pi\lambda}\frac{\Delta x}{x^2}\,.$$

Это уравнение связывает изменение температуры и изменение расстояния от лампочки. Суммируем малые изменения величин по одну и по другую сторону от знака равенства. В результате такого суммирования (интегрирования) получаем

$$T_{\text{поверхн}} - T_\infty = \frac{W}{4\pi\lambda R} - \frac{W}{4\pi\lambda R_\infty}\,.$$

На большом расстоянии от лампочки температура льда равна $-10\ ^\circ\text{C}$, а на стенках возникшего вокруг лампочки пустого шара температура равна $0\ ^\circ\text{C}$. Таким образом, радиус бразовавшейся сферической полости равен

$$R = \frac{1000\ \text{Вт}}{4\pi\cdot 10\ \text{К}\cdot 2{,}2\ \text{Вт}/(\text{К}\cdot\text{м})} = 3{,}62\ \text{м}\,.$$

В.Славутинский

Ф2240. *На уроках химии положено обеспечивать четырехкратный обмен воздуха за час (урок). Обеспечивается это с помощью вентиляции. Температура воздуха в классе должна быть не ниже $+20\ ^\circ\text{C}$. Каждый школьник греет воздух, выделяя мощность 100 Вт. При каком количестве школьников в классе не потребуется дополнительного обогрева помещения, если температура воздуха снаружи $+15\ ^\circ\text{C}$? Потерями тепла через стенки и окна можно пренебречь, объем воздуха в классе равен примерно 200 м^3.*

Воздух снаружи и внутри имеет одно и то же давление, и из класса за урок – $t = 45\cdot 60$ с – выходит наружу объем воздуха $V = 4\cdot 200\ \text{м}^3$. Если считать, что давление нормальное: $p = 10^5$ Па, то через класс за урок проходит количество молей двухатомного газа $\nu = pV/(RT)$. Воздух имеет в таком (изобарическом) процессе теплоемкость на один моль, равную $3{,}5R$. Количество школьников, каждый из которых производит тепловую мощность W, будет равно

$$\frac{3{,}5RpV\Delta T}{WtRT} = 35{,}4\,.$$

Следовательно, в классе должно находиться 35 школьников (и один учитель, который тоже выделяет тепло) – это многовато по нынешним меркам.

С.Варламов

Ф2241. *На горизонтальном столе лежит открытая с двух концов стеклянная трубка – капилляр с диаметром отверстия менее 0,2 мм. Длина трубки 1 м. На стол пролили чернила, и один из концов трубки оказался в лужице чернил. Капилляр начинает втягивать в себя чернила, и в тот момент когда заполнилась 1/10 часть длины трубки, скорость движения границы (чернила – воздух) в капилляре составила 1 см/с. Через какое время трубка окажется полностью заполненной чернилами?*

Движение жидкости в капилляре с малым диаметром D хотя и происходит с изменением скорости, но масса движущейся жидкости настолько мала, что сумму сил, действующих на жидкость внутри капилляра, можно считать равной нулю. Сила поверхностного натяжения, втягивающая чернила в капилляр, постоянна: $F_1 \approx \pi D\sigma$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Сила сопротивления при ламинарном течении жидкости в трубке пропорциональна произведению средней скорости течения и длины участка, заполненного жидкостью: $F_2 \approx \eta v\pi x$, где η – вязкость жидкости. Получается, что скорость течения, т.е. скорость заполнения капилляра, обратно пропорциональна длине заполненного чернилами участка трубки, или что величина, обратная скорости, пропорциональна длине заполненного участка: $1/v = kx$, где коэффициент пропорциональности по условию задачи равен $k = 0{,}1\ \text{с}/\text{см}^2$. Время, требующееся для заполнения чернилами очередного участка длиной Δx, равно

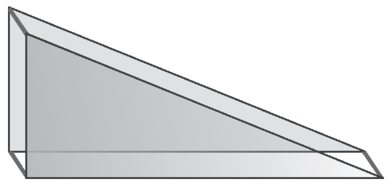
$$\Delta t = kx\Delta x\,.$$

Если просуммировать малые величины слева и справа от знака равенства от начального момента до момента, когда трубка окажется заполненной полностью, то получим время заполнения трубки:

$$T = \frac{k}{2}\left(L^2 - \left(\frac{L}{10}\right)^2\right) = \frac{0{,}1\ \text{с}/\text{см}^2}{2}\left(10^4 - 10^2\right)\text{см}^2 = 495\ \text{с}\,.$$

А.Зильберман

Ф2242. *В космосе находятся две одинаковые заряженные непроводящие и параллельные друг другу жесткие пластины треугольной формы. Чтобы они не соприкасались, между ними вблизи углов пластин, которые равны 30°, 60° и 90°, установлены три маленьких одинаковых непроводящих стерженька (см. рисунок). На поверхностях пластин равномерно рас-*



пределены заряды +3Q и −2Q. С какими силами сжаты стерженьки? Площади треугольников равны S, расстояние между пластинами (длина стерженька) много меньше их линейных размеров.

Пластина с зарядом $+3Q$ находится в почти однородном электростатическом поле, созданном второй пластиной и равном $E = 2Q/(2\varepsilon_0 S)$. Суммарная сила, с которой одна пластина притягивает к себе другую, равна

$$F = \frac{3Q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

Эта сила компенсируется совместным действием трех сил, приложенных к этой же пластине со стороны трех стерженьков. Поскольку заряд по пластине распределен равномерно по площади и пластина находится в однородном электростатическом поле, линия действия равнодействующей электростатических сил проходит через точку пересечения медиан треугольника. Из законов статики следует, что и сумма сил, и сумма моментов сил, действующих на покоящееся тело в инерциальной системе отсчета, равны нулю. Выбирать ось для подсчета суммарного момента сил можно как угодно – все равно суммарный момент сил равен нулю. Выберем ось, проходящую через одну из вершин треугольника и через точку пересечения медиан. Две силы из четырех, действующих на треугольную пластину, лежат на оси, а две другие – нет. Силы, действующие на пластину со стороны стерженьков, не находящихся на оси, параллельны, точки приложения этих сил находятся на одинаковых расстояниях от выбранной оси, а их суммарный момент относительно этой оси равен нулю. Следовательно, эти силы по величине равны друг другу. Таким образом, все силы, действующие на пластину со стороны трех стерженьков, попарно равны друг другу. Силы, с которыми сжаты стерженьки, одинаковы (заметим, что они были бы одинаковыми для треугольных пластин с любыми углами, а не только с углами $30°$, $60°$ и $90°$) и равны по величине

$$f = \frac{F}{3} = \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

С.Дмитриев

Как быстрее падать?

(Начало см. на 4-й с. обложки, затем – на с. 16 внутри журнала)

скорости падающего тела получаем

$$v^2 = \frac{2ml + 4Ml - mx}{ml + 2Ml - mx} gx = 2gx\left(1 + \frac{mx/2}{ml + 2Ml - mx}\right).$$

А если бы тело свободно падало, то квадрат его скорости был бы равен $2gx$. Отсюда следует, что скорость падающего тела, привязанного к канату, всегда больше, чем свободно падающего, и эта разница растет с увеличением массы m каната.

Увеличение скорости падения привязанного тела происходит из-за того, что потенциальная энергия каната НЕ полностью превращается в кинетическую энергию каната, поскольку длина его правой (неподвижной) части со временем увеличивается. Эта неизрасходованная часть потенциальной энергии каната и переходит в кинетическую энергию привязанного тела.

К.Богданов

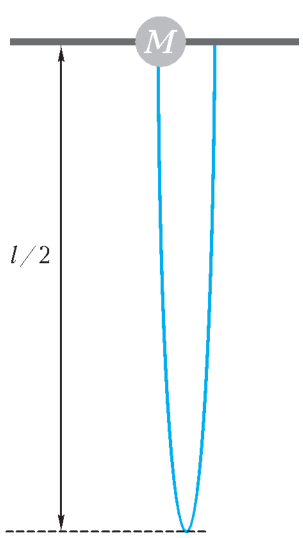


Рис. 1

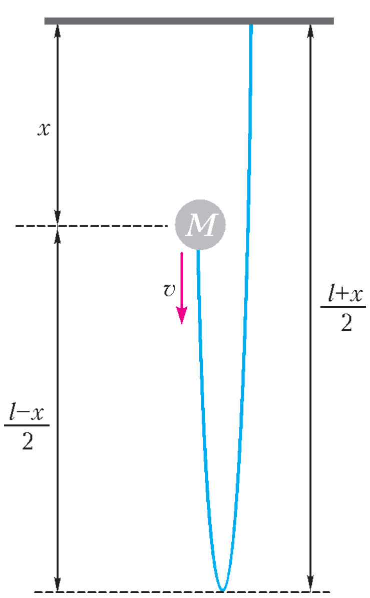


Рис. 2

От редакции

Мы призываем наших читателей поразмышлять над этой интересной проблемой и даже немного поэкспериментировать. Приведенный выше расчет нашего уважаемого автора и ведущего рубрики «Прогулки с физикой» вызвал горячие споры в редакции. А не надо ли включить в расчет переход механической энергии в тепло при мгновенной остановке элементов каната (или цепочки), так похожей на неупругий удар? Какими упруго-пластичными свойствами должен обладать канат (цепочка), чтобы результат $a > g$ оставался верным? По просьбе редакции ведущий раздел «Задачник «Кванта» по физике» С.Варламов вместе со своими учениками провели ряд экспериментов – отпускали один конец длинной цепочки одновременно с тяжелым шариком – и утверждают, что эффект, похоже, удается увидеть! Кроме того, отсылаем вас к экспериментам американских учителей физики (журнал «The Physics Teacher», сентябрь 1996 г.), которым удалось сфотографировать падение свободного конца каната и шарика.

Экспериментируйте, размышляйте и пишите нам!

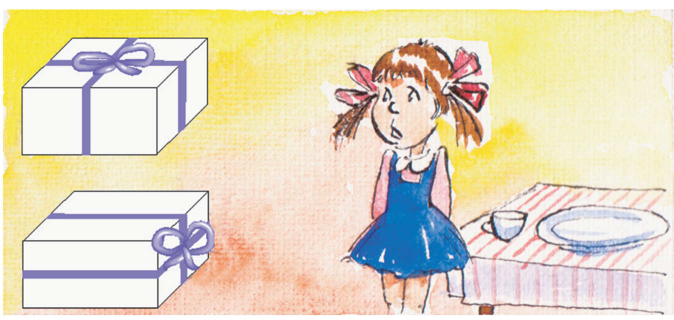
Задачи

1. Петя решил склеить красивый пазл, чтобы повесить его на стену. За одну минуту он склеивал вместе два куска (начальных или ранее склеенных). В результате весь пазл соединился в целую картинку за 2 часа. За какое время собралась бы картинка, если бы Петя за минуту склеивал вместе не по два, а по три куска?

А.Шаповалов

2. Торт упакован в коробку с квадратным основанием. Высота коробки вдвое меньше стороны этого квадрата. Ленточкой длины 156 см можно перевязать коробку и сделать бантик сверху (как на рисунке сверху). А чтобы перевязать ее с точно таким же бантиком сбоку (как на рисунке снизу), нужна ленточка длины 178 см. Найдите размеры коробки.

И.Раскина



3. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час – на несколько минут, а

минуту – на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

И.Раскина

4. Квадрат разрезали на несколько частей. Переложив эти части, из них всех сложили треугольник. Затем к этим частям добавили еще одну фигурку, и оказалось, что из нового набора фигурок тоже можно сложить как квадрат, так и треугольник. Покажите, как такое могло бы произойти.

С.Маркелов, В.Клепцын

5. Победив Кащея, потребовал Иван золота, чтобы выкупить Василису у разбойников. Привел его Кащей в пещеру и сказал:
«В сундуке лежат золотые слитки. Но просто так их унести нельзя: они заколдованы. Переложи себе в суму один или несколько. Потом я переложу из сумы в сундук один или несколько, но обязательно другое число. Так мы будем по очереди перекладывать их: ты в суму, я в сундук, каждый раз новое число слитков. Когда новое перекладывание станет невозможным, сможешь унести свою суму со слитками».
Какое наибольшее число слитков может унести Иван, как бы ни действовал Кащей, если в сундуке исходно лежат: а) 13; б) 14 золотых слитков? Как ему это сделать?

А.Шаповалов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на LXXV Математическом празднике.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvantjournal.ru (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Цилиндрическую кружку диаметра 1 и высоты 2, наполненную доверху водой, отклонили от вертикали на 45° (угол между осью кружки и вертикалью). Какая доля воды вылилась?

А. Ковальджи

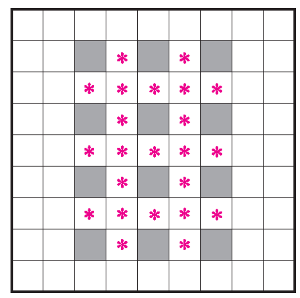
12. Сумма двух натуральных чисел равна 2012. Когда одно из них поделили на второе с остатком, неполное частное оказалось равным делителю. А какой получился остаток?

И.Акулич

13. В 2010 году в школе №1 доля мальчиков равнялась 50%, а в школе №2 – 80%. В 2011 году в каждой из школ доля мальчиков не изменилась, однако в двух школах вместе доля мальчиков стала больше, чем в 2010 году. Приведите пример, как такое могло произойти.

А. Ковальджи

14. Проложите на картинке замкнутый путь, не проходящий ни через какую клетку более одного раза и проходящий через наибольшее количество звездочек. Проходить можно только в соседнюю по стороне клетку, заходить в серые клетки нельзя.



Е.Бакаев

15. Али-Баба попал в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит 200 кг, полный сундук алмазов – 40 кг, пустой сундук ничего не весит; 1 кг золота стоит на базаре 20 динариев, а 1 кг алмазов – 60 динариев. Али-Баба может унести не более 100 кг. Какое наибольшее число динариев он может получить за сокровища, которые он принесет из пещеры за один раз? (Драгоценности можно брать в любых количествах в рамках ограничений по весу и объему.)

А. Ковальджи

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Забавные мячи

(*Начало см. на 2-й странице обложки*)

Любители мастерить могут использовать вместо картона дерево или пластик. Промышленные экземпляры этой головоломки изготавливались более 20 лет назад, сейчас они – редкость. Круги в них были стилизованы под мячи, отчего и произошло название головоломки.

Все девять квадратов головоломки раскрашены по-разному, и ни один из них не обладает вращательной симметрией. Поэтому легко сосчитать количество разных расположений элементов головоломки в большом квадрате. Их будет $4^9 \cdot 9!$ Если конфигурации, получающиеся друг из друга поворотами большого квадрата, считать эквивалентными, последнее число надо разделить на 4.

Несмотря на такое громадное количество возможных конфигураций, решение головоломки можно найти сравнительно быстро. Ведь при поиске решения можно интуитивно сокращать перебор, прикладывая друг к другу квадратики с учетом цвета и размера сегментов. Более того, известно, что есть не менее восьми способов сложить большой квадрат. Но мы не знаем, исчерпываются ли этими восемью решениями все решения головоломки.

Кроме первоначальной задачи, предлагаем читателям еще две.

а) Из всех элементов головоломки составьте прямоугольник 1×9, чтобы внутри него получились целые круги, а сегменты, образующие круги, совпали по цвету.

б) Выберите 8 элементов головоломки и составьте из них прямоугольник 2×4, чтобы все круги внутри него получились целыми и одноцветными.

Попробуйте подсчитать количество различных конфигураций элементов головоломки в этих задачах.

В.Журавлев

Казино «Верный выигрыш»

В.УФНАРОВСКИЙ

— Ну, КАК ДЕЛА В КАЗИНО НА ФОНЕ МИРОВОГО кризиса? – с привычной улыбкой спросил Тед своего старого приятеля Билла, основателя и владельца нового казино в городе. Однако привычной ответной шутки так и не услышал. – Неужто так плохо? – на сей раз в голосе Теда было искреннее сочувствие.

– Да как тебе сказать. Народу по-прежнему много – все с удовольствием пьют бесплатные напитки. Но большие деньги теперь редко увидишь. Народ экономит. Да и вы, математики, постарались – уже все знают, что в казино вероятность проиграть больше, чем вероятность выиграть. Вот и ставят только маленькие суммы. А в результате одни убытки. За напитки и аренду тоже надо платить, только об этом в книжках по теории вероятностей почему-то не пишут.

– Ну, тогда надо сделать все наоборот. Чтобы за напитки посетители платили, а вероятность выиграть была больше, чем вероятность проиграть.

– Да уж. Только объяви, что зеро в рулетке[1] в пользу посетителя, так сразу весь город нагрянет и будет играть да пить пиво. Я даже название казино готов сменить на «Верный выигрыш», чем не реклама? – чувство юмора Билл все-таки сохранил. Но закончил он свою тираду на минорной ноте. – Только, боюсь, что тогда я уж точно разорюсь. Если посетитель будет выигрывать в 19 случаях из 37, казино ожидает крах – это и без теории вероятностей понятно.

– А как насчет психологии? Ведь если посетитель выиграет, он с удовольствием заплатит за напитки. Кока-кола в баре стоит 15 крон, а ты вряд ли платишь больше двух за баночку. Я уже не говорю о напитках покрепче. Вот тебе и теория вероятностей. – Тед усмехнулся и неожиданно добавил. – Но раз уж математика тебе мешает, пусть она же тебе и поможет. Мне нравится идея нового названия. Мы сделаем так…

* * *

Премьера прошла замечательно. Реклама была что надо: «*Верный выигрыш! Зеро в пользу посетителя! Только у нас! Приходите и не пожалеете!*»

Народу набежало – просто не протолкнуться. Все хотели обыграть казино по, казалось бы, невыгодным для него правилам. Многие не могли отойти от стола, за которым шла игра в кости. Тед улыбнулся, вспомнив, как нелегко было убедить Билла ввести новые правила…

– Ты с ума сошел! Значит, теперь можно будет поставить на любую цифру и получить удвоенную ставку, если

[1] У колеса для игры в рулетку 37 ячеек: 18 красных, 18 черных и одна зеленая. При игре на цвет каждый игрок делает ставку на один из цветов. Крупье запускает шарик, который останавливается в какой-то ячейке. Если игрок ставил на красное или на черное и угадал, он получает удвоенную ставку. Если он ставил на зеленое поле (зеро) и угадал, то выигрыш будет в 36 раз больше поставленной суммы. Если цвет не угадан, игрок проигрывает свою ставку.

она выпадет на любой из трех брошенных костей? Правильно я тебя понял?

– Угу.

– Но ведь цифр всего шесть! Что останется моему казино, если в половине случаев я теряю столько же, сколько могу выиграть в других?

– Ты прав. Я забыл специальные правила на случай, если цифра выпадет больше чем на одной кости.

– Ну, слава Богу, хоть и мне что-то достанется. Так что в этом случае? Никто не выигрывает? Или заново кости бросают?

– Наоборот, если цифра выпала на двух костях, клиент получает утроенную ставку.

– Что?!

– Ну, и, скажем, в пять раз больше, если выпало на всех трех.

В тот момент у Билла дар речи, похоже, попросту пропал, поскольку в его лексиконе остались одни согласные.

Но сейчас все шло в точности так, как описал в одной из своих книг Мартин Гарднер: когда кто-то получал пятикратную ставку, проигравшие ненавидели счастливчика, а не казино, не задумываясь, что именно здесь оно и выигрывало.

А в центре внимания оказалась, конечно же, рулетка. Правила были исключительно просты. Кроме обычных (вроде возможности ставить на красное или черное с получением удвоенной ставки, если выпал выбранный цвет), добавились еще четыре:

1. Если выпадает зеро, игрок тоже получает удвоенную ставку.
2. Каждый игрок делает ставки ровно три раза.
3. Величина ставки не меньше трети имеющейся суммы.
4. Максимальная сумма, которую посетитель может унести, – 100 тысяч крон.

Очередь выстроилась такой длины, что дополнительное объявление было воспринято как само собой разумеющееся: «Игроки с начальным капиталом 50000 и больше проходят без очереди». Таких было достаточно много, что только подогревало интерес и азарт. Тед прислушался к разговору неподалеку.

– Ах, барон, это замечательная игра! У меня было 60 тысяч, я поставил половину на красное и выиграл. Эти 30 тысяч я поставил еще раз, но не угадал. Тогда опять поставил 40 тысяч на красное, и выпало зеро! В любом другом казино это было бы крахом, а здесь я стал обладателем разрешенных 100 тысяч и намерен основательно потратить их в местном баре – казино это заслужило!

– Согласен, граф. Вы ведь знаете, для меня деньги не так важны, меня привлекает сама игра. У меня было 30 тысяч сначала, и я поставил все. Уже после второй игры имел 120 тысяч! Третий раз поставил минимум – сорок – не такой я дурак, и проиграл, но выигрыш в 50 тысяч у меня в кармане. Так что в бар немедленно – нам есть на что гулять!

Конечно, как и в любом казино, были свои неудачники. Но жаловались они не на казино: «Только с моим вечным невезением можно проиграть, когда вероятность выигрыша больше, чем проигрыша!»

С автоматами тоже все было в порядке. Объявление гласило: «*Мы – не владельцы автоматов и, к сожалению, не можем изменить вероятность выигрыша. Но мы наняли наших самых больших неудачников, чтобы они взяли на себя большую часть неудач. Дождитесь, пока они проиграют достаточно много раз, и берите игру на себя!*»

Конечно, это был чисто психологический трюк, но он работал. Все были в заблуждении, что после пяти неудач кряду шанс выиграть существенно лучше, чем до этого. Поэтому спрос на помощников казино, готовых за мизерную плату эту неудачу создать, был огромный. Этой идеей Билл был особенно доволен.

– Замечательно! Вместо того чтобы выслушивать жалобы от работников здравоохранения, будто мы разрушаем семьи и создаем самоубийц, мы наняли этих безнадежных игроков, чтобы они могли играть до одурения с единственной целью – проиграть как можно больше раз подряд, притом не теряя своих денег! Они и даром бы согласились, но еще и приплачивать им за это – гениальная задумка!

* * *

На праздничном обеде по случаю удачной премьеры Тед был на самом почетном месте.

– Спасибо тебе огромное за прекрасный замысел, – сказал Билл, подливая вина в бокалы. – Никогда еще бар не приносил такой прибыли, как вчера. Мы спасены! Но знаешь, мне повезло даже с рулеткой: она тоже принесла вчера прибыль!

– Почему это повезло? – возмутился Тед. – Так и должно было быть!

– Ты хочешь сказать, что ожидал этого? Я думал, ты только на буфет рассчитывал.

– Хорошего ты мнения о друзьях! Конечно же, казино должно было выиграть и без буфета.

– А вот этого я уже решительно не понимаю! Объясни, как можно выиграть, если вероятность выигрыша меньше половины?

– С удовольствием, но сначала я закончу с лакомствами.

Спустя немного времени друзья поднялись в комнату Билла и вооружились бумагой и ручками.

– Давай еще раз посмотрим на кубики, – предложил Тед.

– Там ты мне вроде бы уже все объяснил. Если у нас шесть посетителей ставят одновременно по одной кроне на разные цифры, то пока все цифры на трех брошенных кубиках различны, мне от этого ни холодно, ни жарко: я получаю их ставку в шесть крон и троим из них выплачиваю по две. Если же одна и та же цифра выпала на двух кубиках, то одному посетителю я плачу три кроны, две – другому, а одна остается мне. То же самое, если все три кубика выпали одинаково: везунчик получит пять крон, а я забираю шестую. Это я уже оценил.

– Спасибо. А можешь ли ты прикинуть, сколько в среднем выигрываешь?

– Сейчас спрошу кассира.

– Его услуги не понадобятся – пусть допивает шампанское. Какова вероятность того, что все цифры будут разные?

– Э-э-э. Ну, всего у меня шесть в кубе, то есть 216 разных возможностей набрать три цифры. Из них надо выбрать такие, где цифры разные. Сейчас напишу на бумажке.

– И без бумаги легко. Первую цифру можно выбрать шестью способами, для второй остается пять возможностей и четыре для последней цифры. Итого: 6 на 5 на 4.

– Ишь ты! Так и впрямь проще считать. И вероятность, следовательно, будет $(6 \cdot 5 \cdot 4)/6^3 = 5/9$. Значит, свою крону я зарабатываю с вероятностью $4/9$. Лучше, чем я думал.

– Да уж, не жалуйся! А теперь мы легко можем оценить ожидаемый выигрыш: $0 \cdot 5/9 + 1 \cdot 4/9 = 4/9$. Это, собственно, и есть математическое ожидание результата одной игры для казино. Самое главное, что именно математическое ожидание, а не вероятность, определяет, выгодная игра или нет.

– Это понятно.

– Значит, понятно? – Тед ухмыльнулся. – Тогда, ты, конечно, не будешь сердиться, если узнаешь, что от твоего имени я слегка изменил правила и теперь, если выпадают три одинаковые цифры, угадавший получает 10 крон, а не 5, как раньше? Видел бы ты, сколько народу сразу набежало!

– Скажи, что ты пошутил, – взмолился Билл. – Ведь даже последний дурак поймет, что теперь казино в проигрыше. Ты меня разыгрываешь, правда?

– И не думал. Просто проверяю, внимательно ли ты меня слушал. Дурак, значит? И сколько, по-твоему, такой дурак выиграет в твоем казино? Ты вроде не жаловался на убытки? – По непроницаемому лицу Теда трудно было догадаться, какое удовольствие ему доставляла беседа. – Не мог бы ты все же посчитать математическое ожидание игры для другого дурака, который владеет этим казино?

– Я же уже посчитал. Если цифры разные, то результат ноль, если все одинаковые – казино проигрывает 4 кроны, а если ровно две одинаковые, то выигрывает, но только 1 крону. Что тут неправильно?

– Только то, что все эти цифры весьма далеки от того, что мы вычисляем, – от среднего ожидаемого результата. Чтобы его посчитать, надо каждый возможный выигрыш[2] умножить на вероятность его появления и все это сложить. Именно это умножение все меняет! Помнишь, как я тебе объяснял, почему надо считать математическое ожидание, а не вероятность выигрыша?

– Да, помню. Пример был убедительный: если я выигрываю сто крон с вероятностью $3/4$, а в оставшихся случаях теряю тысячу, то играть не стоит, хотя вероятность выигрыша больше половины. Но это было понятно. Мы даже посчитали ожидаемый результат: $100 \cdot 3/4 + (-1000) \cdot 1/4 = -175$.

– Тогда что тебе мешает посчитать математическое ожидание здесь?

– Ну, здесь же три случая.

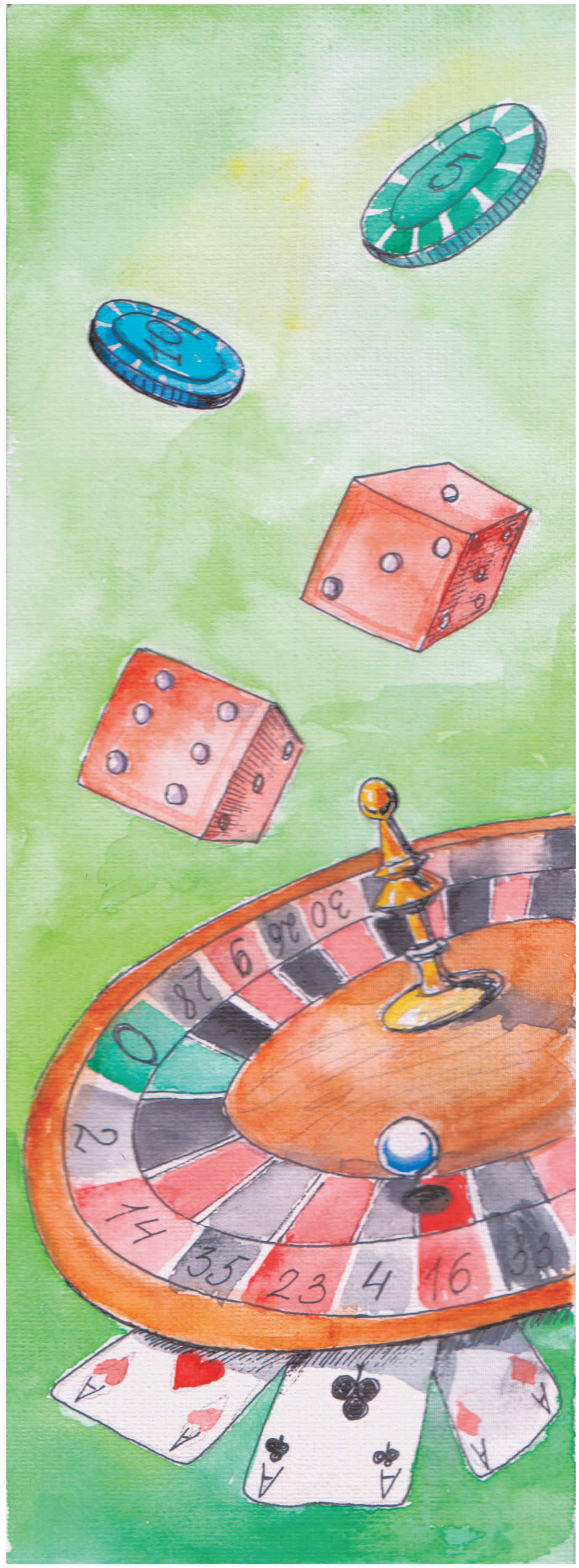
– Какая разница? Просто считай вероятность каждого из них, умножай на результат и складывай. Какова вероятность, что все цифры одинаковые?

– Это как раз понятно: $6/216 = 1/36$ – такие случаи нечасто встречаются. Но как мне считать вероятность того, что выпадут ровно две одинаковые цифры?

– А очень просто. Мы же уже сосчитали вероятность того, что не все цифры разные.

– Да, получалось $4/9$, и это было легко.

– В эти $4/9$ входит вероятность того, что все три цифры одинаковые (она, как ты помнишь, равна $1/36$). Что осталось?



[2] Проигрыш – это выигрыш со знаком минус.

– Понял! Осталась как раз вероятность того, что одинаковых цифр ровно две, и это $4/9 - 1/36$, т.е. $5/12$.

– Тоже немало. И математическое ожидание для казино, если игрок поставил одну крону, будет, значит,

$$0 \cdot 5/9 + 1 \cdot 5/12 + (-4) \cdot 1/36 = 11/36 .$$

– Ничего себе! Больше 30 процентов прибыли!

– Да уж!

– Это я, наконец, действительно понял. Но все равно не верю, что в нашей рулетке математическое ожидание в мою пользу. Правда, оценить его я просто не в состоянии – слишком уж много вариантов, все не переберешь.

– Да, это и вправду похитрее будет. Давай для начала упростим игру: уберем правило с одной третью и оставим только ограничение на максимальный выигрыш 100 тысяч. Тогда это точно будет в пользу посетителя, раз вероятность выигрыша больше половины. Но как ему выгоднее играть? Положим, что у тебя есть 40 тысяч и ты играешь ровно три раза. Сколько бы ты поставил в первую игру?

– Ну-у, сначала бы я выбрал, в какую из игр играть. Наверное, проще всего на цвет. Раз есть 18 черных и 18 красных, то я выбрал бы какой-то из этих цветов, скажем красный, и поставил на него. Так как есть еще и зеро, то вероятность угадать $p = 19/37$ заведомо в мою пользу.

– Ты опять отвечаешь не на тот вопрос. Все равно, в какую именно рулеточную игру ты играешь, раз $p > 1/2$. С таким же успехом ты мог бы ставить на четное или нечетное. Меня интересует, сколько ты поставишь?

– По-разному можно. Барон, скажем, все бы поставил – он всегда так делает. А его зять никогда больше 10 тысяч не ставит, проиграть боится.

– А ты сам-то?

– Ну, скажем, половину, 20 тысяч. Что-то подозрительное есть в твоей интонации, а то бы тоже все 40 поставил.

– А деревья ты любишь? – ошарашил Тед собеседника очередным вопросом.

– Ну, не все, на некоторые у меня аллергия. А при чем тут деревья?

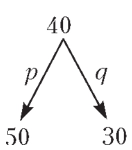


Рис. 1

– Да я собрался нарисовать парочку для тебя. Не беспокойся, это будут математические деревья. Они нам матожидание посчитать помогут. Правда, не знаю как у тебя насчет аллергии к математике, – улыбнулся Тед. – Давай сначала решим, кто умнее: авантюрный барон или его осторожный зять. Проще всего с зятем, который каждый раз по 10 тысяч ставит. С вероятностью p у него станет 50 тысяч, а с вероятностью $q = 1 - p$ будет 30 тысяч. Это мы изобразим картинкой (рис.1).

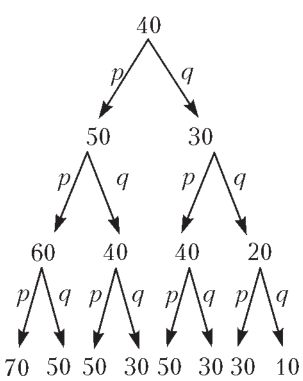
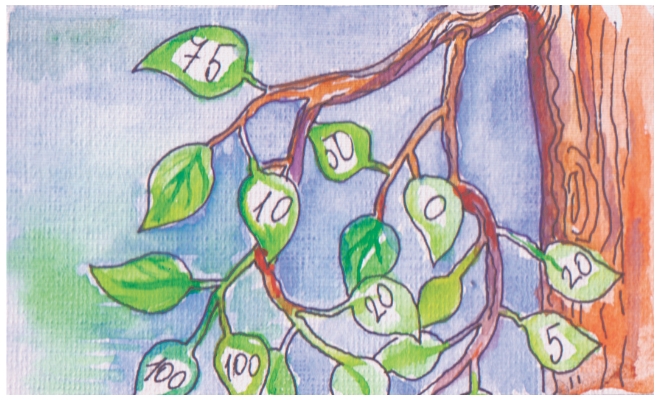


Рис. 2

– Вполне наглядно, – согласился Билл. – А теперь, что будет дальше в каждом из вариантов?

– Ну, точно такая же картинка, только цифры другие. Скажем, если было 50 тысяч, то с вероятностью p у него станет 60 тысяч, а с вероятностью q – 40 тысяч.

– Прекрасно! И если мы дадим ему сыграть третий раз



и соберем все вместе, то получим такую замечательную картинку (рис.2).

– Я подозреваю, что именно ее ты хочешь назвать деревом.

– Конечно! Но как ты догадался?

– Потому что это на тебя похоже – нарисовать без ствола вниз головой и думать, что для всех других это тоже похоже на дерево. А деревья так не растут!

– При чем тут ствол? Это – замечательное дерево! На нем все видно. Скажем, 70 тысяч получится по ветке ppp с вероятностью p^3, а 50 тысяч можно получить в трех вариантах: ppq, pqp и qpp. Итого, вероятность $3p^2q$. Правда, красиво?

– Странные у тебя вкусы, но считать действительно легко. Я даже, наверное, способен теперь написать математическое ожидание результата. Это будет $70 \cdot p^3 + 50 \cdot 3p^2q + 30 \cdot 3pq^2 + 10 \cdot q^3$ – верно? Но что мне толку от этих букв?

– Если ты так не любишь буквы, возьми калькулятор и посчитай! Ты же знаешь: $p = 19/37$ и $q = 18/37$.

– Мне это не очень нравится, но все же полезно узнать, во что может твоя затея обойтись... Хм. Если округлить, то выходит 40811 крон. Я думал, хуже будет.

– А теперь давай игру барона оценим.

– Это я и без уродливых деревьев могу сделать!

– Я весь внимание.

– С вероятностью p у барона станет вдвое больше, в остальных случаях у него ничего не останется, так что после одной игры математическое ожидание его результата будет $2 \cdot 40 \cdot p = 40 \cdot 38/37$ тысяч.

– Ты прекрасно рассуждаешь.

– Тогда, – продолжил Билл самодовольно, – так как за одну игру ожидаемые денежки умножаются на $38/37$, после трех игр это станет $40 \cdot (38/37)^3$ или приблизительно 43332 кроны. Неужели так выгодно быть авантюристом? Ну как, ты доволен своим учеником?

– Иногда я просто удивляюсь, как таким людям доверяют такие деньги.

– А что не так в моих вычислениях?!

– И математика, и психология. Ты правильно считал, что надо умножать на p удвоенный выигрыш, но ты забыл, что максимальная сумма – это 100 тысяч. Так что результат будет не $8 \cdot 40 \cdot p^3$, а только $100 \cdot p^3$.

– Короче говоря, 13541 крона. А, теперь я еще больше оценил правило про 100 тысяч. Я же чувствовал, что авантюра не должна окупаться!

– А главное, – продолжал Тед невозмутимо, – ты забыл, что барон авантюрист, но не дурак. Если у него

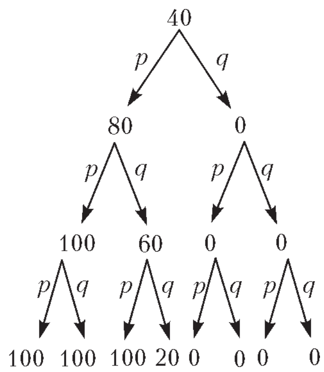


Рис. 3

останется 80 тысяч после первой игры, он не будет ставить больше 20-ти, зная, что больше ста он все равно не получит!

– И как же считать тогда?

– Как и раньше: дерево рисовать. Заметь, что если он выиграет, то уже ничего не будет ставить в третий раз, а если проиграет, то поставит максимум разумного – 40 тысяч (рис.3).

– Вижу. И свои ошибки понял. Но тогда ожидаемый выигрыш будет меньше, чем я боялся: только $100 \cdot p^3 + 2 \cdot 100 \cdot p^2q + 20 \cdot pq^2 = 41629$, но все равно лучше, чем у зятя.

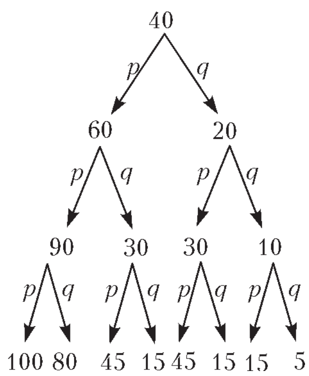


Рис. 4

А что моя половинчатая стратегия дает? Подожди, сейчас сам посчитаю – может, у меня и не будет аллергии на твои деревья. Конечно, имея 90 тысяч, я уже не буду ставить половину, а только 10 тысяч (рис. 4). Всего получается

$$100 \cdot p^3 + 80 \cdot p^2q + 45 \cdot 2 \cdot p^2q + 3 \cdot 15pq^2 + 5 \cdot q^3 = 41394$$

кроны круглым счетом. Я же чувствовал, что надо 40 тысяч ставить!

– Отнюдь. Что барон получил больше, чем ты, еще не значит, что это самый лучший возможный результат. Хочешь узнать, как я бы стал играть?

– Знаешь же, что хочу, говори!

– А ты заметил, что суммы чисел в последней строке каждого дерева всегда одинаковые?

– Это только ты такие вещи замечаешь непонятно как! Но да, сумма и впрямь одна и та же – 320 в каждом из трех деревьев.

– Сообразил, почему?

– Конечно, нет!

– Это просто. Давай еще раз глянем на маленькое деревце (рис.5). Если у меня 40 крон, и я ставлю x крон, то получится $40 + x$ в случае удачи и $40 - x$ в противном случае. Как бы я ни ставил, сумма этих чисел всегда будет 80. Это означает, что в первой строке моего дерева сумма будет 80, т.е. ровно вдвое больше, чем изначальная сумма. Видишь это на всех деревьях?

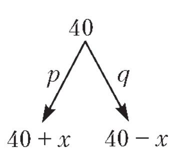


Рис. 5

– Да. Тогда я, кажется, понял. Такое же рассуждение годится и для остальных маленьких деревьев. И это значит, что во второй строке сумма будет еще вдвое больше, т.е. 160. Теперь понятно, почему в последней строке всегда будет 320 – это опять вдвое больше. Удивительно, ты даже с иксами умеешь объяснять, как с числами!

– Ну, а тогда ничего не стоит найти самый умный способ игры. Достаточно эти 320 тысяч распределить так, чтобы выигрыш был максимальный. Справишься?

– Надеюсь. Максимум 100 я сразу положу на наибольшую вероятность p^3. Оставшиеся 220 поставлю на следующую, p^2q: скажем, 100 – на ветки ppq и pqp и 20 – на qpp. Всем остальным веткам дам по нулю. А дальше что делать? Ведь я так и не знаю, сколько в первый раз ставить, чтобы такие цифры получить. Как назад по дереву идти? Не иксы же писать.

– Проще простого! Считай среднее арифметическое каждой пары чисел и пиши его над ними. Посмотри еще раз на маленькое деревце: $\left((40 + x) + (40 - x)\right)/2$ как раз 40 получится!

– Не верится, что так просто. И что же в результате?

– Сейчас нарисуем (рис.6).

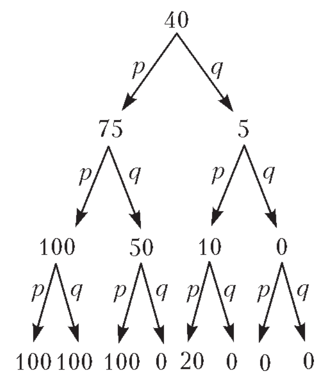


Рис. 6

– Получается, что надо 35 тысяч ставить. Кто бы мог подумать! И матожидание тоже легко сосчитать: $100 \cdot p^3 + 220 \cdot p^2q$, примерно 41764 кроны получится. Барон, пожалуй, в дураках останется.

– Или владелец казино, допускающий такие игры. Теперь настало время поговорить о правиле одной трети. Я думаю, ты уже догадался, зачем оно нужно.

– Полагаю, для того, чтобы не допустить ставок в ноль, если 100 тысяч уже есть.

– Совершенно верно.

– Но я все равно не вижу, что я от этого выигрываю. Может случиться, что перед последней ставкой игрок уже вблизи 100 тысяч, а я – заведомо в проигрыше.

– Но клиент будет доволен?

– Еще бы!

– Видишь, как хорошо, тебе же нужны довольные клиенты? А теперь давай считать. Для простоты дальнейших расчетов предположим, что у игрока изначально было 54 тысячи. Его минимальная ставка – 18, что даст в случае успеха 72 тысячи. Повторный успех приведет его к 96 тысячам.

– Ты меня расстраиваешь такими гнусными предположениями.

– Наоборот, ты этому радоваться должен! Особенно если он выиграет третий раз.

– Ты в самом деле считаешь, что тогда я должен плясать от радости?

– Конечно! Потому что в этом случае он поставит не меньше 32 и, значит, выигрыш будет 128 тысяч, но получит он не все, а только 100, а остаток 28 – уже в твою пользу!

– Ты меня за сумасшедшего держишь! Математика у меня хромает, но не настолько. Какая мне польза от этого, если он пришел с 54, а ушел с 100 тысячами в кармане?

– Дружище, ты все время забываешь, что мы с тобой считаем математическое ожидание. Каким бы оно было без правила одной трети?

– Ну, это мы уже хорошенько разобрали. Значит, так: $8 \cdot 54$ даст 432, 100 пойдет на p^3, 300 – на p^2q, остальное – на pq^2. Итого: $100p^3 + 300 \cdot p^2q + 32pq^2 = 55916$ крон.

– Из них мы 28 тысяч с вероятностью p^3 забираем обратно. Сколько остается?

– Не может быть! 52124.

– Теперь ты доволен?

– Не то слово. Но все же несколько вопросов у меня осталось.

– Давай!

– Если клиент имеет не очень много денег, скажем только 10 тысяч, тогда ему правило одной трети не мешает и он, следовательно, может выиграть?

– Конечно! Именно поэтому мы завели бар и объявили, что с суммой 50 тысяч проходят без очереди. Конечно, любой математик подтвердит, что в твоем казино и в самом деле можно выиграть, если правильно играть. Но он не станет слишком торопиться объяснять всем всю правду. Мне кажется, такие люди заслуживают немножко счастья в рулетке – не так уж много они и выиграют, посчитай! И бар точно все окупит.

– Ну ладно. Но рано или поздно станет известно, что казино выигрывает при больших суммах.

– И ты думаешь, кто-то перестанет играть? Математики тысячи раз объясняли, что вероятность выиграть не меняется, если кто-то уже пять раз подряд проиграл. И что? Посмотри на тех, кто нанимает у нас неудачников. Они верят в свою удачу, а не в математику. Это уже психология. А она точно на нашей стороне. Барон ни за что не променяет твое казино на обычное.

– Хорошо, убедил. Но – последний вопрос. Зачем тебе все это было надо? Как практичный человек, я не верю, что все объясняется одной дружбой.

– Ну, ведь ты сам понял, что я могу выиграть, если буду играть по маленькой.

– И в этом все дело? Кажется, ты что-то недоговариваешь.

– Но если я скажу, что красота математического решения мне намного привлекательней игры и легких денег, ты ведь все равно не поверишь?

– Не знаю, не знаю, – пробормотал Билл.

А довольный Тед, попрощавшись, отправился домой, оставив Билла в глубокой задумчивости.

Задачи

Первые четыре задачи – тренировка определений, задачи 5 и 6 относятся к упрощенной версии игры (без правила одной трети), оставшиеся – к полноценной игре.

1. В обычной классической рулетке можно также ставить на некоторые группы из k чисел, где $k = 1, 2, 4, 9, 12, 18$ (в статье рассмотрен только случай $k = 18$). Если выпадает зеро (а не одна из 36 цифр), игрок проигрывает. Сколько ставок получает игрок в случае выигрыша (математическое ожидание должно быть, конечно, одинаковым для всех k)? Изменится ли ответ, если, как в статье, зеро дает удвоенную ставку (но нет никаких других ограничений)?

2. Какой максимальный выигрыш может позволить казино игроку в кости в тех случаях, когда на всех трех кубиках выпала одинаковая цифра?

3. В новой лотерее выпущено 1000 билетов стоимостью в 1 крону, есть один выигрыш в 500, два – в 100, пять – в 20, двадцать – по пять и сорок – по две кроны. Какова вероятность выигрыша? Каково математическое ожидание? Стоит ли играть?

4. Чтобы увеличить вероятность выигрыша в предыдущей лотерее, организаторы напечатали еще 1000 билетов, каждый из которых дает выигрыш – право бесплатно получить новый билет (если билеты кончились, возвращается 1 крона). Теперь вероятность выигрыша больше половины. Чему она равна? Как изменилось математическое ожидание? Стоит ли теперь играть? А если бы каждый новый билет давал возможность получить два билета бесплатно?

5. Рассмотрите пример из статьи с 40 тысячами и без правила одной трети. Покажите, что 35 – это максимум того, что можно ставить в первый раз. А чему равен минимум?

6. Тед нарисовал для Билла картинку (рис. 7), чтобы показать ему возможные первые ставки (в игре без одной

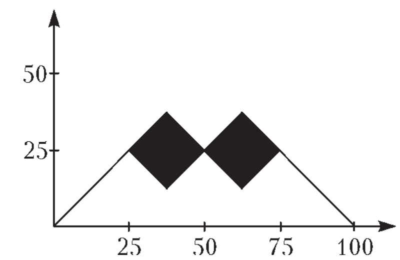


Рис. 7

трети). Проверьте на ней свое решение предыдущей задачи. Как он ее получил? Нарисуйте подобную картинку для случая, когда допускается четыре игры.

7. Рассмотрите случай произвольного разрешенного числа игр. Допуская нецелые числа, определите возможный интервал для первой ставки при начальной сумме x. Нарисуйте график зависимости математического ожидания результата от начальной суммы.

8. Рассмотрите пример в статье с 54 тысячами и правилом одной трети. Предположим, что игрок ставит ровно одну треть, продолжает так делать в случае выигрыша и ставит все, если проиграл. Подсчитайте математическое ожидание результата и убедитесь, что оно существенно больше 52124. Где Тед обманул доверчивого друга в своих рассуждениях? Какой самый лучший результат можно получить? Выгодно ли играть посетителю с такой суммой?

9. Начиная с какой суммы играть в казино «Верный выигрыш» становится невыгодным?

10. Какая начальная сумма приносит максимальный ожидаемый выигрыш?

11. Как лучше всего играть при заданной сумме и каково математическое ожидание результата?

12. Барон имеет 90 тысяч и будет счастлив, если получит максимальные 100 тысяч, и очень несчастен – в противном случае (даже если выиграет). Как ему лучше играть? А если у него другая начальная сумма? А если игр больше, чем три?

...токи продолжаются неопределенно долго с постоянной скоростью, ...но они всегда прекращаются в тот момент, когда контур разрывается.

Андре Ампер

Переход электричества между двумя ближайшими элементами при прочих равных условиях пропорционален разности электроскопических сил в этих элементах.

Георг Ом

Если дана система n проводников, которые произвольным образом соединены между собой, и к каждому проводнику приложена произвольная электродвижущая сила, то необходимое число линейных уравнений для определения токов, текущих по проводникам, можно получить, используя... две теоремы.

Густав Кирхгоф

...переводя существенные черты реальных элементов схем на язык идеализаций, можно проанализировать электрическую цепь сравнительно просто.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знаком вам закон Ома (соединения проводников)?

Первые наши встречи с электрическими схемами происходят, когда мы дома включаем в розетку бытовые приборы либо натыкаемся на хитросплетения проводков под крышкой какого-нибудь электронного устройства или когда замечаем линии электропередач на высоких опорах и толстые провода, по которым скользят токосниматели электропоездов, троллейбусов и трамваев. Позже мы рисуем в школе схемы, ставим простейшие опыты и узнаем о законах электрического, прежде всего постоянного, тока, текущего – как же иначе! – по проводам.

Но в то же время мы пользуемся мобильными телефонами, беспроволочными локальными сетями, «втыкаемся в воздух», чтобы подключиться к Интернету, и все чаще слышим, что не за горами – беспроводная передача не только информации, но и электроэнергии. Какими же тогда архаичными покажутся все эти громоздкие схемы, провода, клеммы, реостаты и описывающие их законы!

Не торопитесь. Во-первых, что бы мы ни передавали – сигналы или энергию, есть излучатели и приемники, которые пока без токов, протекающих по напичканным в них проводникам, действовать не будут. Во-вторых, не все поддается миниатюризации, например – транспорт или электростанции. Поэтому нам с электрическими сетями, а значит, и с соединениями проводников самого разного типа еще долго придется иметь дело. Мы продолжим эту тему и в следующем выпуске «Калейдоскопа», в конце которого поместим общий список «Квантовских» публикаций по теме «Закон Ома».

Вопросы и задачи

1. Почему птицы могут безопасно усаживаться на провода, находящиеся под высоким напряжением?

2. Из последовательно соединенных лампочек для карманного фонаря собрана гирлянда, рассчитанная на включение в сеть напряжением 220 В. На каждую из лампочек приходится напряжение всего около 3 В, однако если вывинтить одну из лампочек из патрона и сунуть туда палец, то сильно «дернет». Почему?

3. Аккумулятор замкнут тремя проводниками одинаковой длины, соединенными последовательно. На рисунке 1 изображен график, показывающий падение напряжения в них. Какой из проводников имеет наибольшее и какой – наименьшее сопротивление?

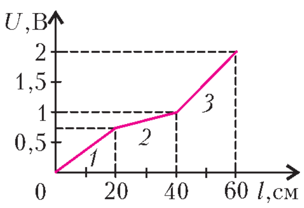


Рис. 1

4. Вычислите общее сопротивление цепи, представленной на рисунке 2, если R = 1 Ом.

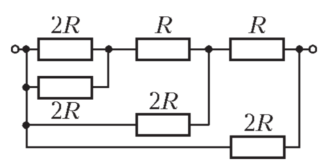


Рис. 2

5. Пять проводников одинакового сопротивления соединили так, что под действием общего напряжения 5 В сила тока в цепи оказалась равной 1 А. Определите сопротивление одного проводника. Единственное ли решение имеет задача?

6. Из одинаковых резисторов сопротивлением по 10 Ом требуется составить цепь сопротивлением 6 Ом. Какое наименьшее количество резисторов для этого понадобится? Начертите схему цепи.

7. Приведите пример цепи, которая не сводится к комбинации последовательных и параллельных соединений.

8. Как изменится сопротивление цепи, состоящей из пяти одинаковых проводников сопротивлением r каждый, если добавить еще

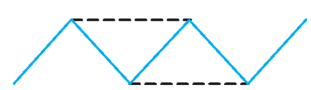


Рис. 3

два таких же проводника, как показано штриховыми линиями на рисунке 3?

9. Каково сопротивление R каждого из двух одинаковых резисторов (рис.4), если вольтметр сопротивлением $R_V = 3$ кОм при включении по схемам а) и б) показывает одинаковое напряжение? Напряжение в цепи в обоих случаях одно и то же.

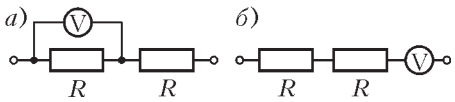


Рис. 4

10. Электрическая цепь, состоящая из резисторов сопротивлениями R_1, R_2 и R_3, подключена к двум источникам постоянного напряжения U_1 и U_2, как показано на рисунке 5. При каких условиях сила тока через резистор сопротивлением R_1 будет равна нулю?

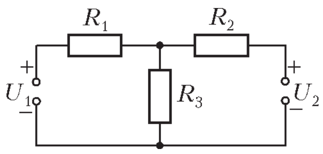


Рис. 5

11. Найдите сопротивление «звезды» (рис.6) между точками A и B, если сопротивление каждого звена равно r.

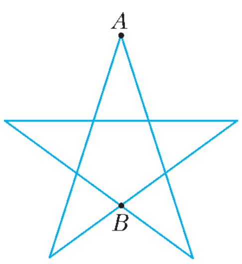


Рис. 6

12. Из тонких однородных листов жести спаяли полый куб, к двум противоположным вершинам большой диагонали которого припаяли проводники, как изображено на рисунке 7. Сопротивление куба между этими проводниками оказалось равным 7 Ом. Найдите силу электрического тока, пересекающего ребро AB куба, если куб подключен к источнику напряжением 42 В.

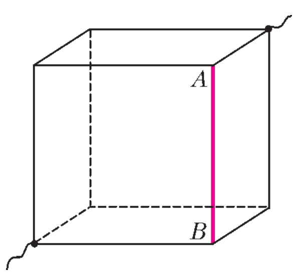


Рис. 7

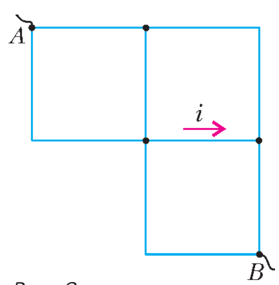


Рис. 8

13. Определите токи в каждой стороне ячейки, изображенной на рисунке 8, полный ток от узла A к узлу B и полное сопротивление между этими узлами. Каждая сторона ячейки имеет сопротивление r, а ток, протекающий по указанной стороне, равен i.

14. В электрическую цепь, состоящую из шести одинаковых резисторов сопротивлением R, впаяли две перемычки CE и DF, как изображено на рисунке 9. Каким стало сопротивление между выводами A и B?

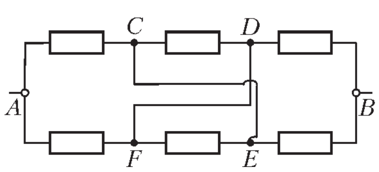


Рис. 9

15. Гальванический элемент замкнут на два параллельных проводника сопротивлениями R_1 и R_2. Уменьшатся ли токи в этих проводниках, если увеличить их сопротивления?

Микроопыт

Как можно определить длину изолированного медного провода, свернутого в большой моток, не разматывая его?

Любопытно, что…

…кажущиеся сегодня тривиальными эксперименты Ома замечательны тем, что положили начало прояснению первопричин электрических явлений, остававшихся немногим менее двухсот лет весьма туманными и лишенными каких бы то ни было опытных обоснований.

…не будучи знаком с законом Ома, французский физик Пуйе, экспериментируя, пришел к подобным же выводам в 1837 году. Узнав, что закон открыт десятилетие назад, Пуйе занялся тщательной его проверкой. Закон был подтвержден с высокой точностью, а «побочным результатом» стало изучение закона Ома французскими школьниками вплоть до XX века под именем закона Пуйе.

…при выведении своего закона Ом ввел понятия «сопротивление», «сила тока», «падение напряжения» и «проводимость». Наряду с Ампером, введшим термины «электрическая цепь» и «электрический ток» и определившим направление тока в замкнутой цепи, Ом заложил основы дальнейших электродинамических исследований на пути к практическому использованию электричества.

…в 1843 году английский физик Чарлз Уитстон, применив закон Ома, изобрел метод измерения сопротивления, известный теперь как мостик Уитстона.

…тождество входящих в формулировку закона Ома «электроскопических сил» с электрическими потенциалами было доказано Кирхгофом. Несколько ранее он же установил законы распределения токов в разветвленных цепях, а позже построил общую теорию движения тока в проводниках, предполагая существование в них двух равных встречных потоков положительного и отрицательного электричества.

…интенсивной разработке методов электрических измерений в XIX веке способствовали запросы техники: создание воздушных телеграфных линий, прокладка подземных кабелей, передача электрического тока по воздушным неизолированным проводам и, наконец, строительство подводного трансатлантического телеграфа. Теоретиком последнего проекта был выдающийся английский физик Уильям Томсон (лорд Кельвин).

…некоторые практические задачи экономики и логистики – такие, например, как поиск минимального по стоимости распределения товаров, нашли свое решение при моделировании транспортных потоков с помощью электрических сетей.

Материал подготовил А.Леонович

Волшебная формула, или Движение со связями

Е.СОКОЛОВ

В этой статье речь пойдет об одной замечательной формуле, которая позволяет единообразно решать целые серии задач. Вот почему мы назвали эту формулу волшебной. Полезна наша формула тогда, когда движения точек не свободны, а обусловлены определенными условиями – связями.

Самый известный пример движений со связями дает абсолютно жесткий стержень (рис.1). Концы стержня, точки A и B, могут двигаться, но их движения всегда таковы, что расстояние между этими точками остается постоянным. Поэтому четыре величины: модуль v_1 скорости точки A, модуль v_2 скорости точки B и углы α и β между скоростями и самим стержнем связаны неким соотношением, а именно

$$v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta .$$

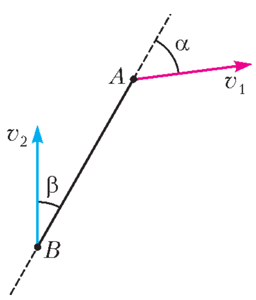


Рис. 1

Это и есть наша замечательная формула.

Вполне возможно, что знатоком наши эпитеты по поводу приведенной формулы покажутся преувеличенными. Они скажут: «Здесь просто записано, что проекции скоростей точек A и B на сам стержень одинаковы. Это само собой очевидно, так и должно быть». Да, знатоки правы. И будет очень хорошо, если и для наших читателей это тоже станет простым и очевидным.

А пока давайте посмотрим, как работает наша волшебная формула при решении конкретных задач.

Задача 1. *Катер движется со скоростью $v_к = 10$ м/с (рис.2). Найдите скорость спортсмена, перемещающегося на водных лыжах, если известно, что угол между*

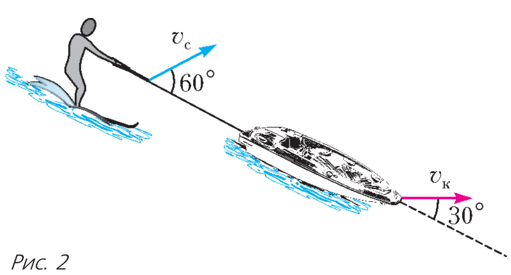


Рис. 2

вектором скорости катера и тросом составляет $30°$, а угол между вектором скорости спортсмена и тросом равен $60°$.

Решение. Ответ получаем сразу, ведь в этой задаче из четырех величин, входящих в нашу формулу, известны три. Значит, уравнение

$$v_к \cos 30° = v_c \cos 60°$$

позволяет сразу же определить последнюю неизвестную:

$$v_c = v_к \frac{\cos 30°}{\cos 60°} = 17{,}3 \text{ м/с} .$$

Интересно отметить, что скорость спортсмена действительно может оказаться больше скорости катера. Спортсмены знают это и используют в своих выступлениях.

Задача 2. *Палочка скользит по сторонам прямого угла (рис.3). В некоторый момент скорость точки A равна v_A. Найдите скорость точки B в этот момент, если отрезок AB составляет угол α с горизонтом.*

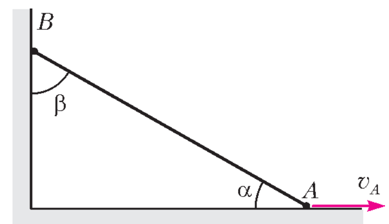


Рис. 3

Решение. Из четырех величин, входящих в нашу формулу, две величины – модуль и направление скорости точки A – заданы явно, а две оставшиеся величины мы должны найти. Однако из одного уравнения мы можем найти только одну неизвестную. Поэтому надо искать в условии задачи величину, заданную неявно.

Конечно же, неявно задано направление скорости точки B. Эта точка всегда лежит на вертикальной прямой – эта прямая является ее траекторией. Скорость точки всегда направлена по касательной к траектории, поэтому скорость точки B направлена вертикально вниз. Теперь оставшуюся неизвестную – модуль скорости точки B – мы можем найти из нашего уравнения. Учитывая, что $\beta = 90° - \alpha$, получим

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos(90° - \alpha) ,$$

откуда следует

$$v_B = v_A \frac{\cos\alpha}{\cos(90° - \alpha)} = v_A \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = v_A \operatorname{ctg}\alpha .$$

Задача 3. *Два кольца одного и того же радиуса катятся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v (рис.4,а). Найдите скорость верхней точки пересечения колец в тот момент, когда угол O_1AO_2 равен 2α.*

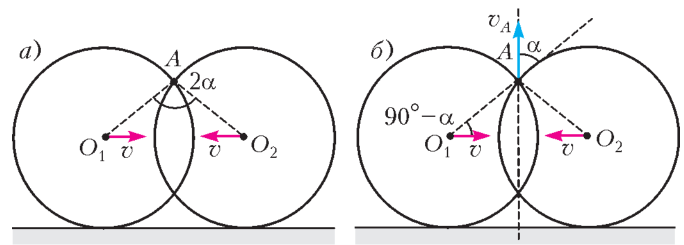


Рис. 4

Решение. До этого мы говорили об отрезках прямых, а годится ли наша формула для окружностей? Вернемся к точкам A и B стержня. О них нам было известно два факта. Первый: они являются концами отрезка. И второй: расстояние между ними не меняется. Первое высказывание не несет никакой информации. Через любые две точки, как бы они ни двигались, всегда можно провести прямую линию. Важен лишь второй факт. А он имеет прямое отношение к окружностям. Ведь если сказано, что точка лежит на окружности, то это означает лишь одно – расстояние между ней и центром окружности обязательно остается постоянным. Поэтому наша формула подходит и для окружностей. Только применять ее следует к радиусам.

Симметрия рисунка 4,*а* подсказывает, что скорость точки пересечения колец направлена вертикально вверх. Следовательно, направление скорости $\vec{v}_A$ уже известно – оно составляет угол α с радиусом O_1A (рис.4,*б*). А величину скорости найдем из нашей формулы. Записывая ее для радиуса O_1A, получим

$$v\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=v_A\cos\alpha,$$

откуда сразу находим

$$v_A=v\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=v\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

А что делать, если угадать направление скорости не удается? Тогда надо честно записать два уравнения для двух неизвестных, модуля скорости и угла, и решить их. Разумеется, для этого надо суметь найти два отрезка, длина каждого из которых по условию задачи не изменяется.

Задача 4. *Найдите скорость верхней точки пересечения двух катящихся колес (рис.5,а) в тот момент, когда она находится на одной горизонтали с центром большого колеса. Скорости колес одинаковы и равны v, радиусы колес r и R.*

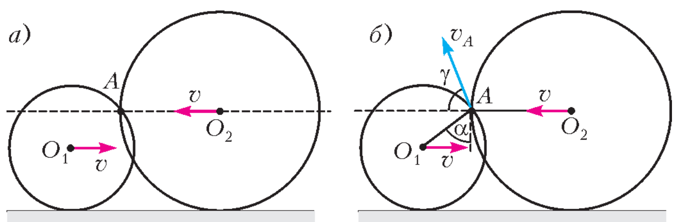


Рис. 5

Решение. Вводим неизвестные: v_A – скорость точки A и γ – угол, который она образует с горизонтом (рис.5,*б*). Скорость точки A образует угол γ с отрезком O_2A и угол $\left(90^\circ+\alpha-\gamma\right)$ с отрезком O_1A, где $\alpha=\arccos\frac{R-r}{r}$. Для этих двух отрезков наше уравнение принимает вид

$$v_A\cos\gamma=v,$$

$$v_A\cos\left(90^\circ+\alpha-\gamma\right)=v\cos\left(90^\circ-\alpha\right).$$

Решение этой непростой системы уравнений мы оставляем читателям и приводим лишь окончательный ответ:

$$v_A=v\sqrt{1+4\,\mathrm{tg}^2\alpha}=v\sqrt{\frac{4r^2}{\left(R-r\right)^2}-3}.$$

А нет ли более простого метода решения этой задачи? Оказывается, есть.

Метод, который мы предлагаем для решения задач со связями, заключается в переходе в движущуюся систему отсчета. Например, рассматривая движение жесткого стержня (см. рис.1), мы можем «сесть на точку B», т.е. перейти в систему отсчета K', которая движется со скоростью $\vec{v}_0$, равной скорости $\vec{v}_2$ точки B. Выигрыш от такого перехода очевиден. Теперь точка B покоится относительно нас, и вместо двух движущихся точек осталась только одна точка A. Это большое упрощение.

Действительно, если точка B покоится, то единственным возможным движением стержня может быть только вращение относительно этой точки. При этом скорость $\vec{v}_1'$ точки A (относительно новой системы отсчета K') может быть любой по величине, но направлена она обязательно перпендикулярно стержню (рис.6).

В неподвижной системе отсчета K, согласно классическому закону сложения скоростей, скорость точки A равна

$$\vec{v}_1=\vec{v}_1'+\vec{v}_0=\vec{v}_1'+\vec{v}_2.$$

Давайте прочитаем эту формулу нужным для нас способом: «Да, скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ концов стержня могут быть разными, но отличаются они лишь на вектор $\vec{v}_1'$, перпендикулярный самому стержню». А это означает, что проекции скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ на стержень одинаковы (проекция их разности $\vec{v}_1'$ на сам отрезок равна нулю). Наша волшебная формула подтверждена.

А теперь посмотрим, как с помощью этого метода можно проще решить задачу 4. Прежде подготовимся, чтобы не запутаться в обозначениях. Скорости центров колес, точек O_1 и O_2, одинаковы: $v_1=v_2=v$ и противоположно направлены: $\vec{v}_1=-\vec{v}_2$. Введем скорость $\vec{v}_0$, равную по модулю v и направленную влево. Эта скорость равна скорости большого колеса: $\vec{v}_2=\vec{v}_0$ и противоположна скорости малого колеса: $\vec{v}_1=-\vec{v}_0$.

«Сядем на большое колесо», т.е. перейдем в систему отсчета K', движущуюся со скоростью $\vec{v}_0$ (рис.7,*а*). В этой системе отсчета большое колесо покоится, а малое движется вправо со скоростью $2v$. Нетрудно убедитьсяв том, что наш ответ для движущейся системы отсчета таков – скорость точки пересечения направлена вертикально вверх и равна

$$v_A'=2v\,\mathrm{tg}\,\alpha,\ \text{где}\ \alpha=\arccos\frac{R-r}{r}.$$

Нам осталось лишь вернуться в лабораторную систему отсчета и с помощью классического закона сложения скоростей $\vec{v}_A=\vec{v}_A'+\vec{v}_0$ пересчитать скорость точки A. С помощью рисунка 7,*б* получаем окончательный ответ:

$$v_A=\sqrt{v_0^2+v_A^{2\prime}}=v\sqrt{1+4\,\mathrm{tg}^2\alpha}=v\sqrt{\frac{4r^2}{\left(R-r\right)^2}-3}.$$

Решение закончено, ответ получен. Расплата за простоту – необходимость пересчитывать скорости при переходе из одной системы отсчета в другую. Впрочем, выбирайте сами, что для вас легче: решать непростую систему уравнений или разыскивать систему отсчета, в которой сразу можно указать направление неизвестной скорости.

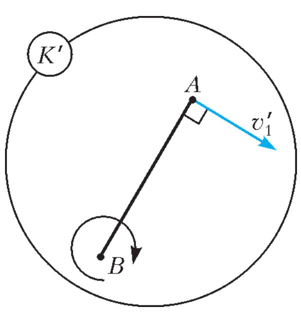


Рис. 6

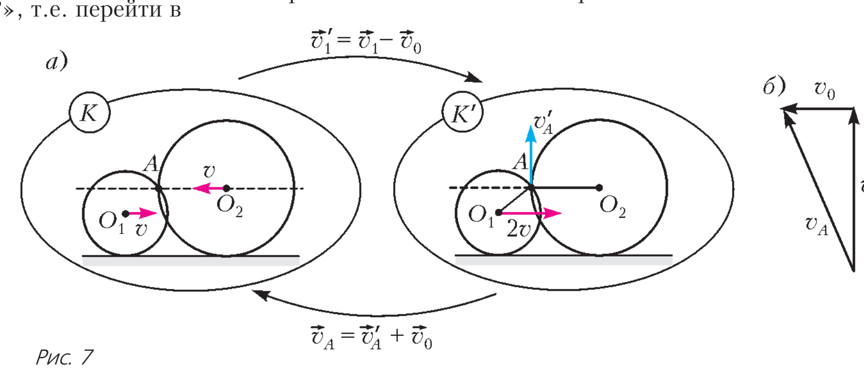


Рис. 7

Маленькая сигма и задачи с модулями

А.БУРОВ

Решение задач с модулем иногда вызывает определенные затруднения из-за необходимости рассматривать многочисленные случаи и подслучаи, для каждого из которых приходится фактически заново выписывать уравнения и неравенства, громоздя ошибки из-за нарастающего количества преобразований. Попробуем избежать этой лавины случаев с помощью одной буквы. Это будет буква σ, которая по-гречески читается «сигма малое».

Пусть $\sigma = \sigma(a)$ – такая функция, что

$$\sigma(a) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a \ge 0, \\ -1 & \text{при} \quad a < 0. \end{cases}$$

С ее помощью запишем определение модуля числа:

$$|a| = \sigma(a)\,a = \sigma a\,.$$

Здесь и далее, если это не будет вызывать недоумения, аргумент при маленькой сигме будем опускать.

Знающие люди скажут нам – постойте, но мы хорошо знаем функцию $\operatorname{sign}(a)$ и прекрасно ею обходимся при определении модуля. Однако эта функция доопределена в нуле нулем, так что ее квадрат разрывен – он всюду равен единице, кроме нуля, где обращается в нуль. Наша маленькая сигма лишена этого неудобного свойства: всегда

$$\sigma^2 = 1\,; \qquad (1)$$

и как раз это свойство оказывается очень полезным при решении задач с модулями.

Ну а теперь задачи ...

Что же, начнем с простой задачи.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$|2x - 3| = 3x - 2.$$

Решение. Запишем это уравнение в виде

$$\sigma(2x - 3) = 3x - 2\,,$$

причем наша $\sigma = 1$, если $x \ge 1{,}5$, и $\sigma = -1$ в противном случае. Отсюда немедленно находим

$$(2\sigma - 3)\,x = 3\sigma - 2\,.$$

Так как скобка в левой части всегда отлична от нуля, то тотчас имеем

$$x = \frac{3\sigma - 2}{2\sigma - 3}\,.$$

Итак, решение найдено в конечном виде без выписывания систем и совокупностей, и остается разобраться, что соответствует обоим значениям σ. Пусть $\sigma = 1$. Тогда $x = -1$, и это решение не подходит, так как не попадает на полупрямую $x \ge 1{,}5$, отвечающую значению $\sigma = 1$. Пусть теперь $\sigma = -1$. По той же формуле находим $x = 1$, и это решение подходит, так как попадает на полупрямую $x < 1{,}5$. Задача решена.

Не очень сложны и уравнения, в которых присутствует вторая степень.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$|x| = x^2 + x - 2.$$

Решение. Представим уравнение как

$$x^2 + (1 - \sigma)\,x - 2 = 0\,.$$

Оно имеет два решения

$$x_\sigma^\pm = \frac{-(1 - \sigma) \pm \sqrt{(1 - \sigma)^2 + 8}}{2}\,.$$

Пусть $\sigma = -1$, т.е. должно выполняться неравенство $x < 0$. Тогда после упрощений

$$x_{-1}^\pm = -1 \pm \sqrt{3}\,.$$

Указанному неравенству удовлетворяет только меньший корень x_{-1}^-.

Пусть теперь $\sigma = 1$, т.е. должно выполняться неравенство $x \ge 0$. Тогда после упрощений

$$x_1^\pm = \pm\sqrt{2}\,,$$

и указанному неравенству удовлетворяет только больший корень x_1^+.

В итоге решений два: $x = -1 - \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{2}$.

Пусть теперь модулей несколько.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$|5x - 3| + |3x - 5| = 9x - 10.$$

Решение. Здесь нам понадобится не одна σ, а целых две: σ_1 и σ_2 – по одной на каждый из модулей. Имеем

$$\sigma_1(5x - 3) + \sigma_2(3x - 5) = 9x - 10\,,$$

откуда немедленно находим

$$(5\sigma_1 + 3\sigma_2 - 9)\,x = 3\sigma_1 + 5\sigma_2 - 10\,.$$

Вновь скобка в левой части не обращается в нуль ни при каких комбинациях σ_1 и σ_2, откуда

$$x = \frac{3\sigma_1 + 5\sigma_2 - 10}{5\sigma_1 + 3\sigma_2 - 9}\,.$$

Мы видим, что перебор случаев и подслучаев сосредоточился не в момент преобразования исходного уравнения, а в момент его анализа, похожего на метод интервалов, но на самом деле – немного формализующего его. Имеем вот такую табличку:

	I	II	III
σ_1	-1	1	1
σ_2	-1	-1	1
	$x < \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \le x < \frac{5}{3}$	$x \ge \frac{5}{3}$

В случае I имеем $x = 18/17$, но неравенство не выполнено. В случае II имеем $x = 12/7$, и неравенства также не выполнены. Наконец, в случае III имеем $x = 2$, неравенство выполнено, и, тем самым, найдено единственное решение.

Несколько модулей могут входить и в систему.

Задача 4. *Решите систему*

$$\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Представим систему в виде

$$\begin{cases} y - 2\sigma_x x = -3, \\ \sigma_y y + x = 3. \end{cases}$$

Решая ее обычным способом, находим

$$x = \frac{3\left(1+\sigma_y\right)}{1+2\sigma_x\sigma_y},\ y = \frac{3\left(2\sigma_x - 1\right)}{1+2\sigma_x\sigma_y}. \qquad (2)$$

Заметим, что при любой комбинации знаков σ_y, σ_x величина $1 + 2\sigma_x\sigma_y$ отлична от нуля и решение (2) «системы с сигмами» существует всегда. Осталось проверить, какие из этих комбинаций удовлетворяют неравенствам, присутствующим в определении величин σ_y, σ_x. Для этого желающие могут составить табличку:

	I	II	III	IV
σ_y	-1	1	-1	1
σ_x	-1	-1	1	1
	$x<0, y<0$	$x<0, y\ge 0$	$x\ge 0, y<0$	$x\ge 0, y\ge 0$

после чего перебрать все случаи. Имеем:

I. $x = 0$; $y = -3$ – не подходит,

II. $x = -6$; $y = 9$ – подходит,

III. $x = 0$; $y = -3$ – подходит,

IV. $x = 2$; $y = 1$ – подходит.

Итак, имеются три решения: II, III и IV.

Метод работает и при решении задач с параметром.

Задача 5. *Исследуйте зависимость решения уравнения*

$$2|x - a| + a - 4 + x = 0$$

от значений входящего в него параметра a.

Решение. По определению,

$$2\sigma(x-a) + a - 4 + x = 0,$$

откуда

$$(2\sigma+1)x - 4 = (2\sigma - 1)a. \qquad (3)$$

Так как скобка в правой части всегда отлична от нуля, то

$$a = \frac{(2\sigma+1)x - 4}{2\sigma - 1} \Leftrightarrow x = \frac{(2\sigma-1)a + 4}{2\sigma+1}.$$

Такое представление нашего уравнения хорошо сочетается с известным графическим методом решения задач. Для точек плоскости Oxa в области $x - a < 0$ имеем $\sigma = -1$, и прямая (3) описывается уравнением

$$a = \frac{x+4}{3} \Leftrightarrow x = 3a - 4. \qquad (4)$$

Подставляя x из второго соотношения (4) в неравенство, определяющее область рассмотрения, находим, что зависимость (4) имеет место при $a < 2$.

Для точек плоскости Oxa в области $x - a \ge 0$ имеем $\sigma = 1$, и прямая (3) описывается уравнением

$$a = 3x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{a+4}{3}. \qquad (5)$$

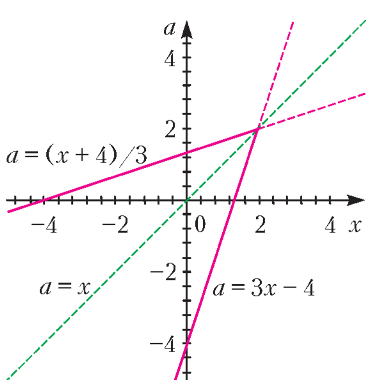


Рис. 1

Подставляя x из второго соотношения (5) в неравенство, определяющее область рассмотрения, находим, что зависимость (5) имеет место при $a \le 2$.

Эти зависимости a от x изображены на рисунке 1, откуда видно, что при $a > 2$ у уравнения нет решений, при $a = 2$ имеется ровно одно решение $x = 2$ и при $a < 2$ таких решений два и они задаются соотношениями (4), (5).

Задача 6. *Для каждого a решите уравнение*

$$x|x + 1| + a = 0.$$

Решение. По определению,

$$x\sigma(x+1) + a = 0.$$

Домножим левую и правую части на σ и воспользуемся свойством (1). Имеем

$$x(x+1) + p = 0, \quad p = \sigma a$$

– квадратное уравнение, несложным образом зависящее от параметра p. Его дискриминант имеет вид

$$D = 1 - 4p,$$

корни задаются соотношением

$$x^{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4p}}{2},$$

их два, если $p < 1/4$, один, если $p = 1/4$, и ни одного, если $p > 1/4$ (рис. 2).

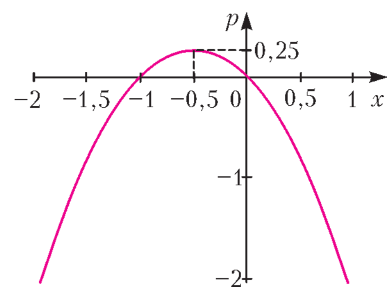


Рис. 2

Пусть $\sigma = -1$, т.е. решение ищется при $x < -1$. В этом случае $D = 1 + 4a \ge 0$, при $a \ge -1/4$, и решение имеет вид

$$x^{\pm}_{-1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Нетрудно видеть, что большее решение x^{+}_{-1} превосходит $-1/2$ и не попадает в рассматриваемый промежуток, в то время как меньшее решение x^{-}_{-1} располагается на данном промежутке при $a > 0$.

Пусть теперь $\sigma = 1$, т.е. решение ищется при $x \ge -1$. В этом случае $D = 1 - 4a \ge 0$, если $a \le 1/4$, и решение имеет вид

$$x^{\pm}_{1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}.$$

Большее решение x^{+}_{1} превосходит $-1/2$ и попадает в рассматриваемый промежуток, в то время как меньшее решение x^{-}_{1} располагается на данном промежутке лишь при $a \ge 0$. Впрочем, мастера строить графики скорее всего предпочтут решать данную задачу графическим методом (рис.3).

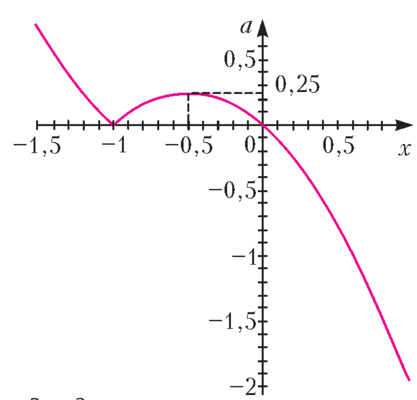


Рис. 3

Несколько задач для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1) $|x-3| + |x-1| = 2$;   2) $\left|1 - x^2\right| = 1 - x$;

3) $2\left|x^2 + 2x - 5\right| = x - 1$ на промежутке $x \in \left(-\infty; \sqrt{2}\right)$;

4) $\dfrac{|x-2|}{|x-1| - 1} = 1$;   5) $-\dfrac{|x|}{x} - x = \dfrac{x^2}{2} + 1$;

6) $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| + |x| = \dfrac{x^2}{|x-1|}$.

Маленькое статистическое отступление

Сделаем теперь небольшое отступление в сторону статистики. Пусть $(x_1,\ldots,x_n)$ – некоторые вещественные числа. Как все хорошо знают, величина

$$x_* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\ , \qquad (6)$$

называемая *математическим ожиданием*, доставляет минимум функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(x - x_k)^2\ . \qquad (7)$$

Но в статистике также активно используется такая величина, как *медиана*. Пусть числа x_k располагаются по возрастанию: $x_1 \le \ldots \le x_n$. Если количество чисел нечетно: $n = 2N + 1$, то медианой называют число, стоящее на $(N+1)$-м месте. Если же количество чисел четно: $n = 2N$, то медиана – *любое* число из отрезка $[x_N; x_{N+1}]$. Спрашивается: существует ли функция, аналогичная (7), которой медиана доставляет минимум? Ответ: такая функция существует и имеет вид

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n}|x - x_k|\ . \qquad (8)$$

С отысканием минимума функции (7) справится всякий, кто выучился выделять полный квадрат – достаточно представить функцию f в виде

$$f(x) = n(x - x_*)^2 - nx_*^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k^2\ ,$$

откуда

$$f_{\min} = f(x_*) = -nx_*^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k^2\ .$$

Как же найти минимум функции (8)? Воспользуемся для этого предложенным методом и представим (8) как

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k(x - x_k) = x\sum_{k=1}^{n}\sigma_k - \sum_{k=1}^{n}\sigma_k x_k\ .$$

Коэффициент при x в этом выражении составлен из одних -1 при $x < x_1$, он будет возрастать на 2 при прохождении через каждое x_i, оставаясь отрицательным при $x < x_{N+1}$ в случае нечетного n и при $x < x_N$ в случае четного n.

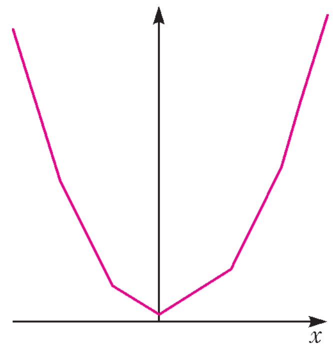


Рис. 4

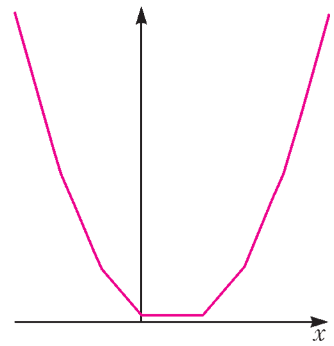


Рис. 5

Непрерывная функция g будет в общем случае монотонно убывать (а в частных случаях – невозрастать) вплоть до этих значений. В случае нечетного n функция достигнет своего минимума при $x = x_{N+1}$ и начнет монотонно возрастать (а в частных случаях – неубывать), начиная с этого значения (рис.4). В случае четного n функция достигнет своего минимума при $x = x_N$, и она будет оставаться постоянной и минимальной вплоть до $x = x_{N+1}$ – коэффициент при x на этом отрезке будет равен нулю. Вот почему в качестве медианы в случае четного количества чисел можно брать любое число из отрезка $[x_N; x_{N+1}]$. Затем функция начнет монотонно возрастать (а в частных случаях – неубывать) (рис.5). Попутно мы установили, что

$$g_{\min} = -\sum_{k=1, k\ne N}^{n}\sigma_k x_k$$

в случае нечетного n и

$$g_{\min} = -\sum_{k=1}^{n}\sigma_k x_k$$

в случае четного n.

Наконец, заметим, что истинной причиной нашего обращения к данному классу задач были исследования движения систем при наличии сухого кулоновского трения. Но эти задачи составляют предмет отдельного разговора.

Автор благодарен И.Ф.Кожевникову за подбор задач и ценные замечания.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Как увидеть пятно Пуассона

Н.РОСТОВЦЕВ, А.СЕДОВ

ПЯТНО ПУАССОНА – ЭТО СВЕТЛОЕ ПЯТНЫШКО В ЦЕНТре тени от круглого экрана, освещаемого точечным источником света (рис.1).

Его история связана с противостоянием двух теорий света: волновой и корпускулярной. Основоположник волновой теории света голландский физик Христиан Гюйгенс считал, что от каждой частицы светящегося тела в эфире распространяются сферические волны, подобно тому как от места падения камня в воду распространяются круговые волны («Трактат о свете», 1690 г.). В противоположность Гюйгенсу, выдающийся английский ученый Исаак Ньютон полагал, что из источника света вылетают частицы света – корпускулы. Они движутся с большой скоростью прямолинейно, чем и объясняется закон прямолинейного распространения света («Оптика», 1704 г.). На протяжении всего XVIII века большая часть физиков придерживалась корпускулярной теории света.

В начале XIX века английский физик Томас Юнг провел первый демонстрационный эксперимент с двумя пучками света, при наложении которых в одних местах они усиливали друг друга, а в других гасили (образно говоря, свет + свет = темнота). Это явление интерференции света хорошо

Рис. 1

объясняла волновая теория света, а корпускулярная теория объяснить не могла. Но сторонники корпускулярной теории не унимались. Они говорили, в частности, что звуковые волны легко огибают преграду и за преградой тень не образуется. Если свет – волна, то за преградой не должно быть и тени, а в действительности мы наблюдаем тень ввиду прямолинейного распространения света. Перед сторонниками волновой теории возникла задача: объяснить закон прямолинейного распространения света, исходя из волновых представлений о свете. Эту задачу решил французский физик Огюстен Френель, применив разработанный им метод зон (как теперь говорят, зон Френеля). Последуем ему.

Пусть от удаленного источника света к точке наблюдения P (рис.2,*а*) распространяются сферические волны. Рассмотрим одну из них, находящуюся от точки P на расстоянии L.

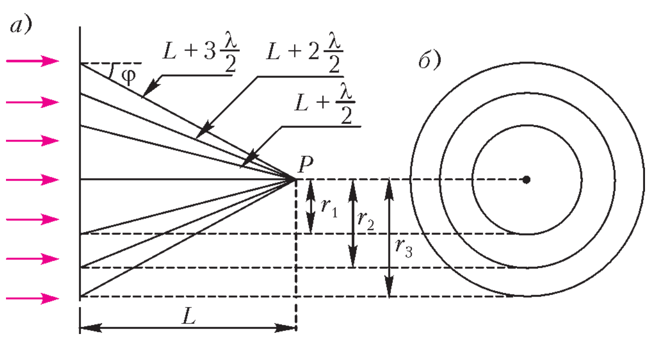


Рис. 2

Так как радиус этой волновой поверхности велик, то при расчете будем считать ее плоской. Из точки P, как из центра, проведем сферы радиусами $L+\lambda/2$, $L+2\lambda/2$, $L+3\lambda/2$ и так далее, где λ – длина волны света. Эти сферы вырежут из волновой поверхности зоны в виде колец (рис.2,*б*). Площади этих зон, как несложно показать (сделайте это самостоятельно), одинаковы и равны

$$S = \pi L\lambda .$$

Согласно принципу Гюйгенса, от первой зоны приходит волна с амплитудой A_1, от второй – с амплитудой A_2, от третьей – с амплитудой A_3 и так далее. С увеличением номера зоны расстояние от зоны до точки наблюдения растет, увеличивается и угол φ между нормалью и направлением на точку P, вследствие чего амплитуды колебаний приходящих волн уменьшаются, т.е.

$$A_1 > A_2 > A_3 \ldots$$

Известно, что при наложении двух волн с разностью хода $\lambda/2$ они ослабляют друг друга – амплитуда результирующей волны равна разности амплитуд этих волн. Но как раз с такой разностью хода $\lambda/2$ приходят волны в точку P от двух соседних зон: первой и второй, третьей и четвертой и так далее. Следовательно, амплитуда результирующего светового колебания в точке P будет равна

$$A = (A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \ldots = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots ,$$

или

$$A = A_1/2 + (A_1/2 - A_2 + A_3/2) + (A_3/2 - A_4 + A_5/2) + \ldots$$

При приближенном подсчете слагаемые в скобках равны нулю, поэтому можно записать

$$A = A_1/2 .$$

Полученный результат означает, что действие всей волновой поверхности в создании световых колебаний в точке P эквивалентно действию половины первой зоны. При $L = 1$ м и $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м площадь половины первой зоны равна

$$\frac{1}{2}\pi L\lambda \approx 0{,}8 \text{ мм}^2.$$

Отсюда следует, что свет от удаленной светящейся точки приходит в точку наблюдения как бы в узком прямом канале, поперечное сечение которого не превышает 1 мм, т.е. свет распространяется прямолинейно.

Разработанный Френелем метод зон был представлен на рассмотрение в Парижскую Академию наук. В комиссии, которая рассматривала эту работу, был математик Симеон Пуассон, ярый противник волновых представлений о свете. Чтобы опорочить волновую теорию света и метод зон Френеля, Пуассон предложил мыслимый эксперимент с круглым экраном. Будем рассуждать вместе с Пуассоном.

Закроем непрозрачным экраном первую зону Френеля. Тогда, согласно методу зон, роль первой зоны будет играть вторая зона, и в точке P (см. рис.2) будет наблюдаться свет с амплитудой $A_2/2$. Закроем экраном две первые зоны – в точку P будет приходить свет от третьей зоны с амплитудой $A_3/2$ и так далее. Таким образом, в центре тени от круглого экрана всегда должно быть светлое пятно. Этот «нелепый» вывод, по мнению Пуассона, свидетельствует о несостоятельности и волновой теории света, и метода зон Френеля.

Член той же комиссии физик Доминик Араго в тот же день произвел опыт с круглым экраном и наблюдал светлое пятно, теоретически предсказанное Пуассоном. Пятно Пуассона – блестящее доказательство волновой теории света и метода зон Френеля.

Оказывается, пятно Пуассона легко можем увидеть и мы. Для этого достаточно иметь лампочку от карманного фонаря, собирающую линзу с фокусным расстоянием 6–10 см (лупу или стекло от очков) и круглые экраны диаметром от 0,1 мм до 1 мм. Для получения таких экранов надо подготовить стеклянную пластинку 4×4 см, кисточку с жесткими щетинками и флакончик туши. Смочив тушью кончики щетинок, кисточку располагают над пластинкой на высоте 10–15 см. Тонким стержнем отгибают щетинки вверх, а затем резко их отпускают. Двигаясь вниз, щетинки стряхивают капельки туши на стекло. Многие из них имеют правильную круглую форму и после высыхания играют роль круглых экранов.

Чтобы увидеть пятна Пуассона, стекло с пятнышками туши располагают на расстоянии 1,5–2 м от горящей лампочки, а на расстоянии 16–20 см от глаза помещают линзу. Затем линзу удаляют от глаза по направлению к стеклу и на некотором расстоянии линзы от стекла наблюдают тени от засохших пятнышек туши. В центре теней от пятнышек малого диаметра хорошо видны пятна Пуассона. А вот в центре тени от пятнышек большого диаметра пятна Пуассона едва заметны. Правда, при увеличении расстояния стекла от линзы их яркость возрастает.

Математические тайны печати царя Соломона

В.ЖУРАВЛЕВ, П.САМОВОЛ

Введение

Перелистывая старую книгу[1] Сэма Лойда, можно наткнуться на такую задачу.

Задача 1. «Печать царя Соломона»

Перед вами фрагмент рисунка, на котором король Страны Головоломок и принцесса Загадка исследуют тайны знаменитой печати царя Соломона, изображенной на его гробнице (рис. 1). Король пытается подсчитать, сколько на этом рисунке можно обнаружить различных равносторонних треугольников. А как полагаете вы?

Рис. 1

Сама по себе эта задача не представляет труда даже для школьника, не слишком искушенного в математике. Однако эту задачу можно существенно усложнить, если вместо внутреннего треугольника, стороны которого разделены параллельными линиями на 4 части, рассмотреть общий случай равностороннего треугольника, стороны которого разделены на n частей линиями, параллельными основаниям (рис. 2). Три больших треугольника, которые не разделены на меньшие, вообще можно отбросить, так как они не вносят существенного вклада.

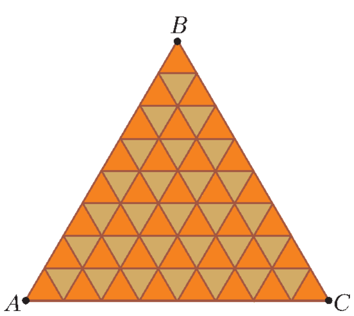


Рис. 2

Мы получаем такую общую задачу. Дана решетка, образованная равносторонними треугольниками с длиной стороны 1. На ней по линиям решетки нарисован равносторонний треугольник с длиной стороны n. Требуется подсчитать, сколько в нем есть различных равносторонних треугольников (со сторонами, лежащими на линиях решетки). Если мы найдем количество треугольников для каждого n, образуется последовательность 1, 5, 13, … Возникает естественный вопрос – какова явная формула для n-го члена этой последовательности?

Если немного отойти от вымысла Сэма Лойда и попытаться соблюсти некую историческую справедливость, относящуюся к собственно геометрической форме печати царя Соломона[2] (рис. 3), то получится, что рассматривать на треугольной решетке мы должны были бы или шестиугольник с длиной стороны n, или шестиконечную звезду. Понятно, что в этом случае мы получим другие последовательности. Например, в случае шестиугольника начальными членами последовательности будут числа 6, 38, 116, …

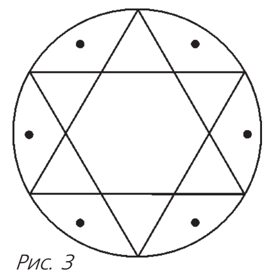


Рис. 3

Треугольные числа

Прежде чем заняться общей задачей подсчета треугольников, разберем примеры попроще. Далеко ходить не будем, а взглянем на тот же рисунок 2. Сформулируем задачу, известную еще со времен пифагорейцев.

Задача 2. *Сколько узлов (точек пересечения, вершин) находится в равностороннем треугольнике с длиной стороны n на треугольной решетке?*

Решение. Будем считать, что все точки пересечения прямых решетки (узлы) расположены в исходном треугольнике с длиной стороны n в $(n + 1)$ рядах. Нумерацию рядов мы начнем с точки B, тогда отрезок AC будет $(n + 1)$-м рядом. Таким образом, в первом ряду мы имеем один узел, далее 2 узла и т.д., в последнем ряду мы имеем $n + 1$ узел. Чтобы получить общее число узлов, мы должны просуммировать числа от 1 до $n + 1$.

Школьник, знакомый с арифметической прогрессией, без труда вычислит эту сумму:

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Мы не зря упомянули пифагорейцев. Читатель, знакомый с фигурными числами, узнает в этой сумме $(n+1)$-е треугольное число. Наши узлы как раз и располагаются треугольником.

Поскольку треугольные числа и суммы такого рода будут часто встречаться нам в дальнейшем, обозначим n-е треугольное число через T_n. Как мы уже отмечали, n-е треугольное число есть сумма натуральных чисел от 1 до n, следовательно,

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Полученная формула останется верной, если мы положим $T_0 = 0$.

[1] Сэм Лойд. «Математическая мозаика». (М.: Мир, 1980). Задача 256.

[2] Форма печати царя Соломона взята из Википедии (http://ru.wikipedia.org/wiki/Печать_царя_Соломона).

Необходимые подробности о многоугольных или фигурных числах читатель может найти, например, в статье А.Д.Бендукидзе «Фигурные числа» («Квант» №6 за 1974 год).

Пирамидальные числа

Давайте теперь выйдем из плоскости в пространство. Для этого точки или узлы треугольного числа заменим шарами и последовательно положим на n-е треугольное число $(n-1)$-е треугольное число, затем $(n-2)$-е треугольное число и так далее вплоть до одного шара, который является первым треугольным числом. В итоге мы получим треугольную пирамиду из шаров. Количество шаров в пирамиде будет n-м треугольным пирамидальным числом. Из нашего построения следует, что n-е треугольное пирамидальное число – это сумма n первых треугольных чисел. Такое же построение мы можем сделать для любого многоугольного числа и получить n-е k-угольное пирамидальное число.

Обозначим n-е треугольное пирамидальное число через $P_n^{(3)}$. Из нашего построения следует, что

$$P_n^{(3)} = T_n + T_{n-1} + \ldots + T_1 .$$

Задача 3. *Докажите, что n-е треугольное пирамидальное число* $P_n^{(3)}$ *задается формулой*

$$P_n^{(3)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} .$$

Задача 4. *Докажите, что n-е квадратное пирамидальное число* $P_n^{(4)}$ *задается формулой*

$$P_n^{(4)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Мы уже обсудили, что пирамидальное число – это сумма n фигурных чисел. Следовательно, для квадратных чисел имеем

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

В дальнейшем нам понадобится одно поразительное соотношение, которое нетрудно доказать методом математической индукции.

Задача 5. *Докажите, что*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = T_n^2 .$$

В следующем разделе мы выясним, что существует связь между треугольными и пирамидальными числами и задачей про печать Соломона.

Подсчет числа равносторонних треугольников

Вернемся теперь к нашей задаче подсчета треугольников. Итак, сформулируем обобщенную математическую задачу.

Задача 6. *На правильной треугольной решетке выделен правильный треугольник с длиной стороны n (см. рис. 2). Сколько различных равносторонних треугольников можно насчитать в этом треугольнике?*

Прежде чем решать задачу, введем понятие типа треугольника. Будем считать, что треугольник имеет тип Δ, если он направлен острием вверх, и имеет тип ∇, если он направлен острием вниз (рис. 4). Понятно, что все наши треугольники принадлежат или к одному, или к другому типу.

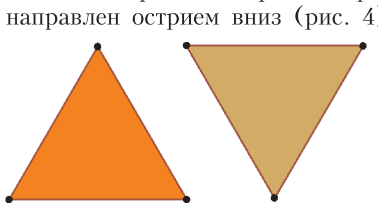


Рис. 4

Решение. Пусть общее число треугольников в треугольнике со стороной n равно $t(n)$.

Не теряя общности, можно считать, что наш исходный треугольник направлен острием вверх, т.е. имеет тип Δ. Как видно из рисунка 2, при подсчете мы встретим оба типа треугольников.

Через $\Delta(n)$ и $\nabla(n)$ обозначим общее количество треугольников соответствующих типов в треугольнике с длиной стороны n. Если треугольник имеет длину стороны p, то мы также будем говорить, что он принадлежит одному из соответствующих типов Δ_p или ∇_p. Через $\Delta(n;p)$ и $\nabla(n;p)$ обозначим общее количество треугольников типов Δ_p и ∇_p, расположенных в треугольнике с длиной стороны n.

Чтобы подсчитать общее количество треугольников, мы сначала найдем общее количество треугольников типа Δ, затем найдем общее количество треугольников типа ∇ и оба этих числа сложим.

Займемся подсчетом треугольников, направленных острием вверх. Каждый треугольник типа Δ_p определяется по местоположению своей верхней вершины. Поскольку длина стороны треугольника равна p, то верхняя вершина такого треугольника может располагаться в любом узле, начиная с первого ряда и вплоть до $(n+1-p)$-го ряда. В рядах с номерами большими, чем $n+1-p$, верхняя вершина такого треугольника располагаться не может. Множество узлов, где могут располагаться верхние вершины, образует треугольник; соответственно, количество возможных вариантов является треугольным числом. Поэтому получаем

$$\Delta(n;p) = T_{n+1-p} .$$

Тогда

$$\Delta(n) = \Delta(n;1) + \Delta(n;2) + \ldots + \Delta(n;n) = T_n + T_{n-1} + \ldots + T_1 .$$

Правую часть этого равенства мы уже видели, когда определяли пирамидальные числа. Значит,

$$\Delta(n) = T_n + T_{n-1} + \ldots + T_1 = P_n^{(3)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} .$$

Проведем теперь рассуждения для треугольников, направленных острием вниз. Нам поможет замечательное наблюдение. Рассмотрим какой-либо треугольник, направленный острием вниз, который лежит в исходном треугольнике с длиной стороны n – например, синий треугольник на рисунке 5. Отразим его относительно каждой из его сторон – получатся три треугольника, на рисунке 5 они выделены красным. Теперь рассмотрим треугольник, составленный из синего и красных треугольников. Его сторона в два раза больше стороны синего треугольника, но расположен он острием вверх (см. рис. 5). Нетрудно видеть, что полученный треугольник также лежит в исходном треугольнике с длиной стороны n.

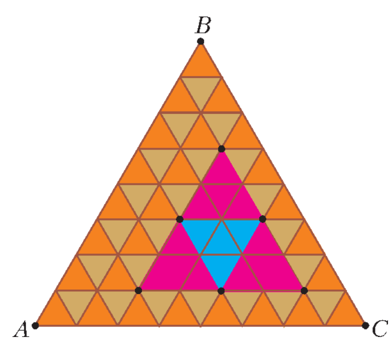


Рис. 5

Мы получаем взаимно однозначное соответствие между треугольниками, направленными острием вниз, и треугольниками с удвоенной стороной, направленными острием вверх. Следовательно,

$$\nabla(n;p) = \Delta(n;2p) .$$

Естественно, мы должны потребовать выполнение условия $n+1-2p > 0$. В противном случае, если $n+1-2p \le 0$, то $\nabla(n;p) = 0$.

Вспоминая предыдущие вычисления, получаем

$$\nabla(n;p) = \Delta(n;2p) = T_{n+1-2p} \text{ при } n+1-2p > 0 .$$

Значит,

$$\nabla(n) = \nabla(n;1) + \nabla(n;2) + \ldots + \nabla(n;p) + \ldots =$$

$$= T_{n-1} + T_{n-3} + \ldots + T_{n+1-2p} + \ldots$$

Чтобы упростить эту сумму, давайте сделаем предварительные вычисления.

Задача 7. *Докажите формулы*

а) $T_1 + T_3 + \ldots + T_{2k-1} = \dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}$;

б) $T_2 + T_4 + \ldots + T_{2k} = \dfrac{k(k+1)(4k+5)}{6}$.

Возвращаемся к нашей задаче. Нам придется рассмотреть два случая.

Если n четно, тогда $n = 2k$. Имеем

$$\nabla(n) = T_{n-1} + T_{n-3} + \ldots + T_{n-2p+1} + \ldots + T_1 =$$

$$= T_{2k-1} + \ldots + T_3 + T_1 = \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} .$$

Теперь в последнем выражении сделаем обратную замену $k = \frac{n}{2}$. Получим

$$\nabla(n) = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} .$$

Если n нечетно, то $n = 2k+1$, $k \geq 0$; тогда

$$\nabla(n) = T_{n-1} + T_{n-3} + \ldots + T_{n-2p+1} + \ldots + T_2 =$$

$$= T_{2k} + \ldots + T_4 + T_2 = \frac{k(k+1)(4k+5)}{6} .$$

Опять сделаем обратную замену $k = \frac{n-1}{2}$. Получим

$$\nabla(n) = \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24} .$$

Нам осталось сложить формулы для $\Delta(n)$ и $\nabla(n)$. После приведения подобных членов получаем

$$t(n) = \frac{n(n+2)(2n+1)}{8}, \text{ если } n \text{ – четное число;}$$

$$t(n) = \frac{(n+1)(2n^2+3n-1)}{8}, \text{ если } n \text{ – нечетное число.}$$

Любители краткости могут объединить обе эти формулы в одну:

$$t(n) = \frac{2n(n+2)(2n+1) - 1 + (-1)^n}{16} .$$

Как видим, количество треугольников в печати Соломона выражается многочленами третьей степени от n. Многочлены третьей степени не встречаются в формулах фигурных чисел, но мы их встречали в формулах пирамидальных чисел.

Квадратная печать

А теперь предлагаем взглянуть на печать премудрого царя Соломона глазами неизвестного русского художника середины XIX века. На фрагменте его картины (копия фрагмента

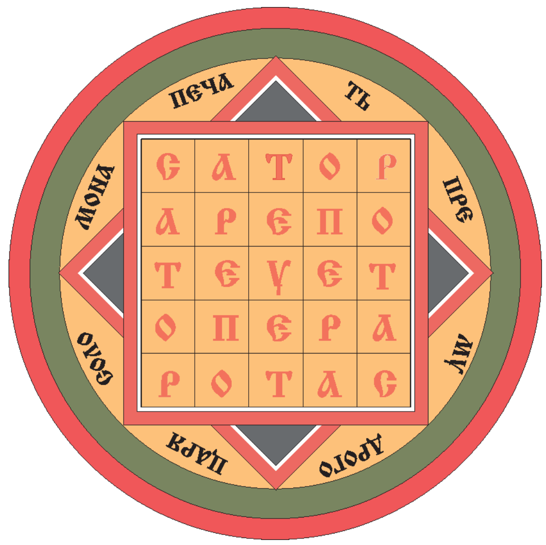


Рис. 6

приведена на рисунке 6) мы видим изображение печати, представляющей собой квадрат, разбитый на 25 клеток. Глядя на такую трансформацию печати Соломона, мы легко придумаем следующую задачу. Надеемся, что ее решение не составит особого труда для наших читателей.

Задача 8. *Докажите, что число квадратов в квадрате $n \times n$ равно количеству квадратных пирамидальных чисел, а именно*

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Подсчет числа равносторонних треугольников. Новый взгляд

Мы определили треугольное число как количество узлов в треугольнике, нарисованном по линиям треугольной решетки. Сами линии при этом не очень нужны – ведь мы считаем только узлы. Давайте уберем эти линии из рисунка 2, а оставим равносторонний треугольник с длиной стороны n, составленный только из узлов (рис. 7). Чтобы отличать полученную решетку от предыдущей решетки с линиями, назовем ее узловой решеткой. Теперь, задавая себе тот же вопрос, мы получим совершенно другую математическую задачу.

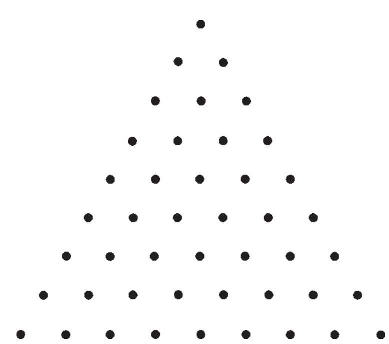


Рис. 7

Задача 9. *Рассмотрим равносторонний треугольник с длиной стороны n (см. рис. 7), составленный из узлов. Сколько можно насчитать различных равносторонних треугольников, все вершины которых лежат в узлах этого треугольника?*

Заметим, что теперь в задаче не требуется, чтобы стороны равносторонних треугольников шли по линиям решетки, следовательно, возможны случаи, изображенные на рисунке 8.

Эта задача явно сложнее предыдущих. Перебор вариантов существенно вырос даже для маленьких значений n. А существует ли вообще такая формула?..

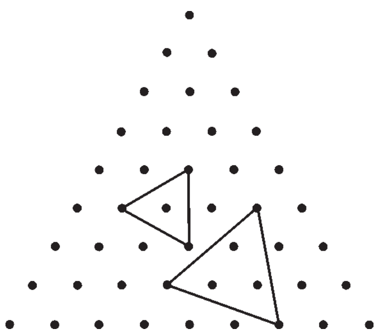


Рис. 8

Давайте все-таки попробуем решить эту задачу.

Решение. Как и ранее, не теряя общности, будем считать, что наш исходный треугольник с длиной стороны n направлен острием вверх, т.е. имеет тип Δ_n. Обозначим общее число равносторонних треугольников в нем через $s(n)$.

Решая эту задачу, хочется поступить так же, как и в предыдущий раз. Разбить все треугольники на типы, найти число треугольников каждого типа и затем все эти числа сложить. Однако теперь даже ответ на вопрос, сколько различных типов равносторонних треугольников расположено на узловой решетке, вызывает трудности.

И все же одна из ранее прозвучавших идей нам поможет.

Рассмотрим какой-нибудь треугольник с вершинами на узловой решетке. Нетрудно понять, что существует *минимальный* треугольник типа Δ, который его содержит (рис. 9). Назовем этот минимальный треугольник «обертывающим треугольником» для нашего треугольника.

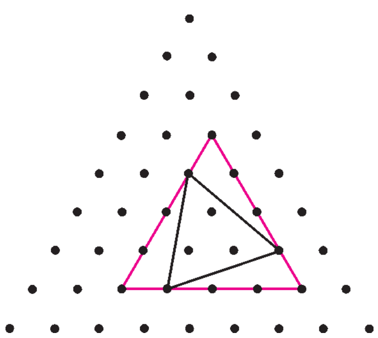


Рис. 9

Заметим, что если наш треугольник лежит в исходном треугольнике, то и его обертывающий – тоже. Какие бывают обертывающие треугольники и сколько их всего, мы знаем – ведь это просто все треугольники типа Δ.

Пусть длина стороны обертывающего треугольника равна q. Зададим себе вопрос: «Сколько существует различных треугольников, у которых обертывающий треугольник имеет длину стороны q (или, другими словами, имеет тип Δ_q)?» Как ни странно, но их тоже ровно q. Во-первых, обертывающий треугольник сам себя обертывает. Каждому из остальных треугольников соответствует промежуточный узел на нижнем основании обертывающего треугольника (этот узел мы можем сопоставить нижней вершине треугольника, который мы оборачиваем), т.е. мы имеем дополнительно еще $q-1$ треугольник. На рисунке 10 показаны все треугольники, у которых обертывающие треугольники имеют типы Δ_4 и Δ_5.

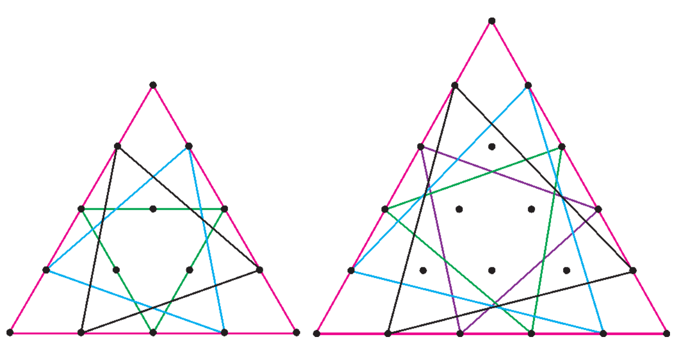


Рис. 10

Количество треугольников типа Δ_q мы уже считали, оно равно $\Delta(n;q) = T_{n+1-q}$. И для каждого из них есть q треугольников, которые он обертывает. Таким образом, чтобы найти общее количество равносторонних треугольников в исходном узловом треугольнике, мы должны вычислить сумму

$$s(n) = \sum_{q=1}^{n} qT_{n+1-q}.$$

Давайте это сделаем:

$$s(n) = \sum_{q=1}^{n} qT_{n+1-q} = \sum_{q=1}^{n} q\frac{(n+1-q)(n+2-q)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((n+1)(n+2)\sum_{q=1}^{n} q - (2n+3)\sum_{q=1}^{n} q^2 + \sum_{q=1}^{n} q^3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((n+1)(n+2)\frac{n(n+1)}{2} - \right.$$

$$\left. -(2n+3)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = \binom{n+3}{4}.$$

Итак, число равносторонних треугольников равняется биномиальному коэффициенту – числу сочетаний из $n+3$ по 4.

Вот так результат!

Мы раскрыли только некоторые тайны трансформаций печати мудрого царя Соломона. Надеемся, что наши читатели попытаются открыть новые.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 10 и 11 фигуры расположены на правильной треугольной решетке.

Задача 10. Докажите, что в ромбе с длиной стороны n можно насчитать $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ равносторонних треугольников. Сравните этот результат с количеством квадратных пирамидальных чисел.

Задача 11. Докажите, что в правильном шестиугольнике с длиной стороны n можно насчитать:

$\frac{n(6n^2+9n-4)}{2}$ равносторонних треугольников, если n – четное число;

$\frac{(n+1)(6n^2+3n+1)}{2} - 4n$ равносторонних треугольников, если n – нечетное число.

Задача 12. Подсчитайте число правильных шестиугольников в узловом правильном шестиугольнике с длиной стороны n (рис. 11).

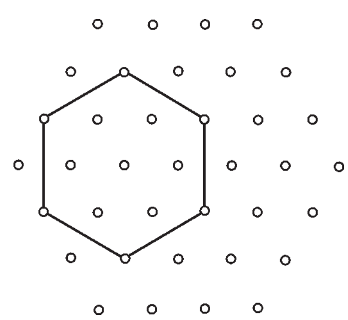


Рис. 11

Задача 13. Подсчитайте число квадратов в узловом квадрате $n \times n$.

Задача 14. Подсчитайте число квадратов в узловом прямоугольнике $m \times n$, где $m > n$.

Пузырек и термояд

А.СТАСЕНКО

...это единственный способ заставить чайник вскипеть. Если он только заметит, что вы этого ждете и нервничаете, он даже не зашумит. Нужно удалиться и приступить к трапезе... При этом на чайник ни в коем случае не следует даже оглядываться. Тогда вы скоро услышите, как он фыркает и плюется.... и заливает спиртовку.

Джером К. Джером. Трое в лодке (не считая собаки)

При ускоренном движении в некой среде тела, обладающего сравнимой или (тем паче) меньшей плотностью, заметную роль играет так называемая присоединенная масса этой среды.[1] Она очень важна в динамике парашюта, дирижабля, подводной лодки. Любая попытка изменить их состояние равномерного и прямолинейного движения приводит, в принципе, к ускорению всей массы атмосферы или океана. Гидродинамики вычислили, что, например, для шара присоединенная масса равна половине массы окружающей среды в объеме этого шара, для цилиндра – массе среды в объеме всего цилиндра. (Как тут не вспомнить статическую силу Архимеда с ее «весом жидкости в объеме погруженной части тела»).

Эта присоединенная масса особенно существенна для воздушного пузырька в жидкости, поскольку их плотности отличаются на несколько порядков и, значит, массой самого пузырька (т.е. газа или пара в нем) можно вообще пренебречь по сравнению с присоединенной массой жидкости.

Ну, кому же не известно мирное сипение чайника на плите? Это пузырьки, оторвавшиеся от дна, поднимаются вверх в пока что холодные слои воды и схлопываются там в результате конденсации пара на их внутренней поверхности, порождая приятный и многообещающий шум. Но настоящий физик не будет просто ожидать готовности чая – он сформулирует модель процесса.

Рассмотрим сферически-симметричное движение границы пузырька в предположении, что давление во всем объеме жидкости мгновенно выросло на величину p_0. Сферическая симметрия означает, что во всех точках обеих сред скорость движения $u(r)$ будет направлена к центру пузырька и одинакова по величине на одном и том же расстоянии r от этого центра.

Оценим прежде всего время τ ($[\tau]=\text{с}$) схлопывания пузырька. Из качественных соображений ясно, что оно тем меньше, чем больше величина скачка давления p_0 ($[p_0]=\text{Н}/\text{м}^2=\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}^2)$), и тем больше, чем плотнее («тяжелее») жидкость, т.е. чем больше ее плотность ρ_0 ($[\rho_0]=\text{кг}/\text{м}^3$) (а плотность газа в пузырьке, как мы помним, совсем не важна), и, конечно же, тем больше, чем больше начальный радиус пузырька r_0 ($[r_0]=\text{м}$). Поскольку секунды входят только в размерность p_0, сразу видно, что искомое время должно быть обратно пропорционально корню квадратному из этого приращения давления. Теперь уже нетрудно сообразить, что единственная комбинация из упомянутых величин, имеющая размерность времени, выглядит так:

$$\tau \sim r_0\sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}.$$

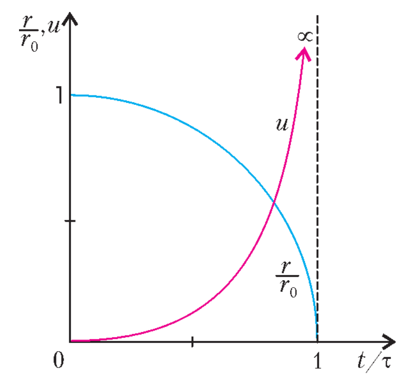
Далее, согласно закону сохранения энергии, работа сил давления пойдет на изменение кинетической энергии газа и жидкости и на изменение их внутренней (тепловой) энергии. Последним пренебрежем, т.е. будем считать, что температура (и плотность ρ_0) жидкости остается почти постоянной, а масса пузырька ничтожна в сравнении с окружающим океаном. Поэтому для оценки запишем закон изменения кинетической энергии в виде

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0\frac{u^2}{2}-0\sim p_0\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3-\frac{4}{3}\pi r^3\right).$$

Здесь слева легко узнать «массу жидкости в объеме пузырька» в текущий момент времени, когда его радиус равен r, а справа – изменение объема пузырька. Сократив на текущий объем $\frac{4}{3}\pi r^3$, получим выражение для оценки скорости границы пузырька:

$$u\sim\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{r_0^3}{r^3}-1\right)}\sim\frac{r_0}{\tau}\sqrt{\left(\frac{r_0}{r}\right)^3-1}.$$

Напомним, что для наших оценок совершенно не важны множители типа 2 или $1/2$. Но вот что важно: оказывается, когда пузырек совсем близок к исчезновению ($r\to 0$), скорость его границы стремится к бесконечности! А поскольку $u=dr/dt$, то касательная к кривой $r(t)$ стремится к вертикали) (см. рисунок). Отметим, что более точная зависимость описывается дифференциальным уравнением Ламба–Рэлея–Плессета... Сколько гидродинамиков потрудились над одним пузырьком!



Итак, мы пришли к ужасающему и запретному выводу: скорость границы пузырька может стать больше скорости света! Конечно, еще раньше начнут действовать не учтенные нами факторы – жидкость станет сжимаемой ($\rho_0\neq\text{const}$), плотность и температура пара (не успевающего конденсироваться на внутренней поверхности пузырька) или «чужого» газа (не успевающего раствориться в жидкости) сильно возрастут и т.д. Поэтому реально достигаются значения скорости порядка километров в секунду – тоже не мало, если вообразить себе лобовое столкновение двух сверхзвуковых самолетов. И если такое столкновение (кавитация) происходит на поверхности, то наблюдаются многие нежелательные и опасные явления – разрушение быстро вращающихся корабельных винтов, сердечных клапанов и т.п. А некоторые экспериментаторы утверждают, что при схлопывании пузырьков в объеме не только имеет место красивое явление свечения (сонолюминесценция), но и достигаются температуры порядка миллиона градусов и фиксируются продукты ... термоядерной реакции!

Так что, прислушиваясь к мирному сипению чайника, подумайте – не идут ли уже оттуда нейтроны. Ведь не напрасно чуткие мамы не допускают детей к кипящим кастрюлям.

---

[1] Подробнее о присоединенной массе можно прочитать, например, в статье Г.Коткина «Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда» («Квант» №1 за 1976 г. или №3 за 1996 г.). (*Прим. ред.*)

Решение задач ЕГЭ с «черного хода»

И.ВЫСОЦКИЙ

МАЛЕНЬКОЕ НЕНУЖНОЕ ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что вы увлекаетесь математикой, регулярно читаете научную и популярную литературу по математике, успешно участвуете в олимпиадах. После школы вам придется сдавать ЕГЭ по математике. Возможно, вы считаете, что при вашей подготовке вам это не составит труда. Но, скорее всего, вы хотите **не только сдать экзамен, но сдать его достойно**. Будет обидно, если из-за неверной оценки своих сил и времени вы не сумеете сделать на экзамене то, на что способны.

Открою тайну: **ЕГЭ придуман не для вас**. Более того: **в некотором смысле ЕГЭ по математике против вас**.

Вы спросите – тогда для кого ЕГЭ? Для всех и ни для кого. Вот такой вот единый экзамен для совершенно разных людей. Пока что с этим приходится мириться.

Почему ЕГЭ по математике против вас? Потому что он предоставляет «режим наибольшего благоприятствования» самому слабому школьнику, которому нужно решить **только свои задачи**, чтобы подтвердить свою слабенькую тройку и получить аттестат. А **вам придется решить не только свои задачи, но сначала чужие**, стоящие на пути к интересным, сложным и дорогостоящим задачам второй части. В результате вы вынуждены тратить силы и время на решение большого числа лишних задач. Здесь и кроется главная опасность. Стремясь как можно скорее прорваться через первую часть, легко допустить обидные вычислительные ошибки или просто не так понять условие. Плохо исполненная первая часть экзамена способна свести на нет блестящее выполнение всех заданий второй части.

Запомните: **ЕГЭ – не школьная контрольная работа**, которая контролирует, чему научился школьник за отчетный период. И **ЕГЭ не олимпиада**, где нужны неожиданные идеи. ЕГЭ – неинтересное и скучное мероприятие, где нужно показать хороший результат, не устраивая экспериментов. Нужно планомерно разобраться с первой частью, проверить ее (по возможности убедиться, что получаются одинаковые ответы при разных способах решения). Затем нужно перейти ко второй части, спокойно, без спортивного азарта решить столько задач, сколько получится.

Не расстраивайтесь, если вы не успеваете решить несколько последних задач или не понимаете, как это сделать – никто от вас этого не ждет. Ваша цель – как можно лучше выполнить то, что вам точно по плечу.

По изложенной выше причине в этой статье речь пойдет не только о задачах части С, но и о самых простых и понятных задачах части В. Перед авторами вариантов ЕГЭ стоит конструктивная задача – ускорить решение первой части тому, кто обладает высокой математической культурой. В результате многие задачи имеют второе короткое решение, можно сказать «черный ход». Разумеется, это относится не ко всем задачам.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Задание В3 «Площадь многоугольника»

Задача 1. *Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 1). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.*

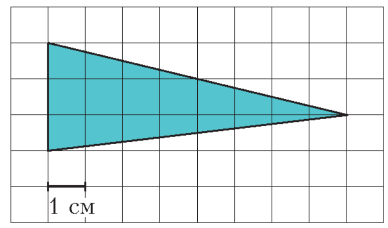


Рис. 1

Одна из сторон равна 3 см, высота, проведенная к этой стороне, равна 8 см. Значит, площадь равна $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8=12$ (см^2). Очень хорошо. Не случилось ли так, что мы обсчитались? Проверим.

Посчитаем по клеточкам. Разобьем треугольник на два прямоугольных треугольника и каждый достроим до прямоугольника (рис. 2). Теперь площадь треугольника посчитать очень просто.

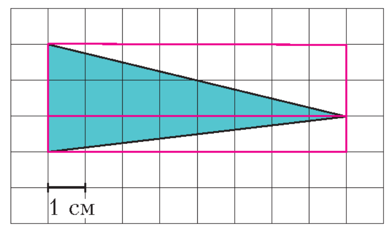


Рис. 2

Еще можно воспользоваться формулой Пика.

Формула (теорема) Пика[1]. *Если все вершины многоугольника лежат в узлах прямоугольной решетки с размером ячейки 1 × 1 (рис. 3), то площадь многоугольника равна $I+\frac{1}{2}B-1$, где I – число узлов решетки внутри многоугольника, а B – число узлов на границе.*

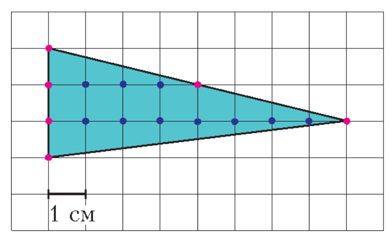


Рис. 3

Пометим разными цветами узлы сетки внутри и на границе треугольника. Получаем: $I=10$, $B=6$. Тогда площадь равна $10+\frac{6}{2}-1=12$.

Если для задачи 1 формулу Пика можно использовать только в качестве «контрольного выстрела», то для следующей задачи я бы взял именно ее в качестве основного метода решения.

Задача 2. *Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (рис. 4). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.*

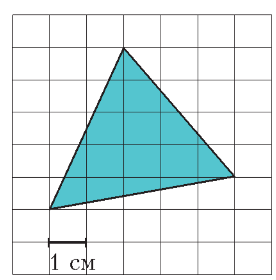


Рис. 4

Формула Пика немедленно дает:

$$11+\frac{3}{2}-1=11,5\ (\text{см}^2).$$

Чтобы проверить расчет, лучше применить формулу Пика дваж-

[1] Георг Александр Пик (Georg Alexander Pick) – австрийский математик. Формула площади многоугольника на решетке открыта им в 1899 году. Доказательство формулы Пика (хотя бы для выпуклого многоугольника) можно рекомендовать как самостоятельное упражнение.

ды. При этом во второй раз нужно изменить порядок подсчета вершин – это почти наверняка гарантирует обнаружение ошибки, если она была сделана.

Возможны и другие методы. Например, вычитание площадей трех треугольников из площади прямоугольника, расчет сторон по теореме Пифагора и применение формулы Герона.

Задание B4 «Наилучший выбор»

Задание B4 предназначено для проверки умения считать и сравнивать. Поэтому в нем редко можно найти черный ход. Тем не менее, некоторые задачи составлены так, что сравнивать можно быстро, не проводя предварительных вычислений. В качестве примеров приведу две задачи одного типа.

Задача 3. *В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года):*

Наименование продукта	*Белгород*	*Екатеринбург*	*Омск*
Пшеничный хлеб (батон)	*11*	*16*	*16*
Молоко (1 литр)	*23*	*27*	*24*
Картофель (1 кг)	*10*	*16*	*16*
Сыр (1 кг)	*205*	*270*	*260*
Мясо (говядина)	*240*	*300*	*295*
Подсолнечное масло (1 литр)	*44*	*50*	*50*

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 1 батон пшеничного хлеба, 2 л молока, 2 кг сыра. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Разумеется, нельзя совсем обойтись без вычислений. Но можно быстро понять, о каком городе идет речь. Все указанные продукты дешевле всего в Белгороде.

Вот похожая задача.

Задача 4. *В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года):*

Наименование продукта	*Белгород*	*Екатеринбург*	*Омск*
Пшеничный хлеб (батон)	*16*	*16*	*12*
Молоко (1 литр)	*25*	*27*	*25*
Картофель (1 кг)	*9*	*16*	*16*
Сыр (1 кг)	*240*	*270*	*220*
Мясо (говядина)	*280*	*300*	*300*
Подсолнечное масло (1 литр)	*65*	*50*	*65*

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 3 л молока, 2 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Тут самый дешевый город явно не выделяется. Однако видно, что покупка в Белгороде экономит на мясе 40 рублей, по сравнению с двумя другими городами. В молоке проигрыша нет. А проигрыш на подсолнечном масле (15 р. по сравнению с Екатеринбургом) эти 40 рублей компенсировать не может. Итак, Белгород – нужный город. Осталось выяснить сумму чека.

Задание B11 «Объем и площадь поверхности тела»

Задача 5. *Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке 5 (все двугранные углы прямые).*

Можно долго находить отдельно площадь каждой грани. Но лучше заметить, что если мы «выдавим вмятину» наружу, то получится прямоугольный параллелепипед с ребрами 3, 5 и 5 и с той же площадью поверхности:

$$S = 2(5\cdot 5 + 5\cdot 3 + 5\cdot 3) = 110 .$$

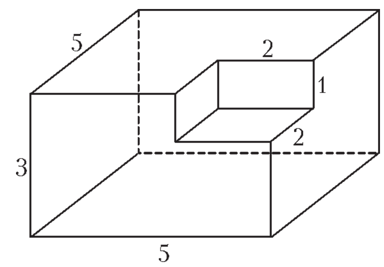


Рис. 5

Задача 6. *В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.*

Решим задачу через черный ход. Не будем переливать воду, а мысленно «раздуем» цилиндр, увеличив вдвое его диаметр. Это значит, что площадь основания увеличится в $2^2 = 4$ раза. Объем жидкости сохранится, а поэтому ее уровень упадет тоже в 4 раза.

Задача 7. *Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?*

Эта задача похожа на предыдущую. Только здесь происходит увеличение во всех трех измерениях. Следовательно, объем увеличится в $2^3 = 8$ раз.

Задача 8. *Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 33. Найдите объем шара.*

Это задача Архимеда.[2] *Ответ*: 22. Шар занимает две трети объема цилиндра, описанного около него, – факт, который полезно помнить.

В следующих двух задачах предлагаю читателю сразу дать ответ.

Задача 9. *Конус вписан в цилиндр. Объем конуса равен 5. Найдите объем цилиндра.*

Задача 10. *Конус вписан в шар, радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 32. Найдите объем конуса.*

Задание B14 «Исследование функций»

Последняя задача первой части ЕГЭ по математике является самой «школьной» в том смысле, что в 10 и 11 классе как раз изучается наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке. Для этого есть общий хорошо известный алгоритм. Обычно он описывается следующим образом.

1. Убедиться в том, что функция дифференцируема на указанном отрезке.
2. Найти ее производную.
3. Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение.
4. Среди корней уравнения выбрать те, которые принадлежат данному отрезку.
5. Вычислить значение функции в каждой из выбранных точек и в концах отрезка. Наименьшее и наибольшее из полученных чисел являются соответственно наименьшим и наибольшим значением функции на данном отрезке.

Однако большую часть задач этого типа можно решить в уме, если знать несколько приемов и представлять графики функций, известных из школьного курса.

---

[2] Объем цилиндра относится к объему вписанного в него шара как 3 к 2, а полная поверхность этого цилиндра равняется поверхности вписанного в него шара. Эти два открытия Архимед ценил особенно. Соответствующий чертеж он завещал выбить на своем надгробии. Это и было исполнено, о чем есть несколько свидетельств.

Беспокойный пассажир

Утверждение 1. *Функции* $f(x) = a\cos x + bx$ *и* $f(x) = a\sin x + bx$ *монотонно возрастают, если* $|a| \le b$.

График такой функции – волнообразная кривая, идущая около прямой $y = bx$ (рис.6). Если $|a| \le b$, то эта функция «наследует» монотонность линейной функции $y = bx$.

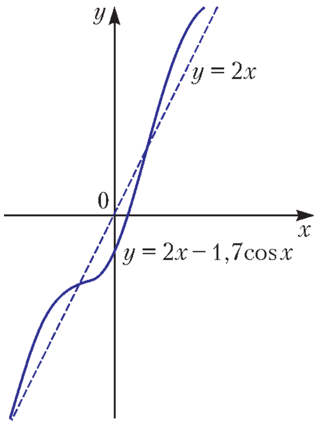


Рис. 6

Для доказательства этого факта достаточно показать, что функция везде имеет производную, которая на всей прямой имеет один и тот же знак. Сделайте это самостоятельно.

Мы не будем пользоваться производной, а построим несложную умозрительную конструкцию. Представим себе вагон, который идет с постоянной скоростью b. По вагону туда-сюда ходит пассажир со скоростью меньшей b (но, возможно, достигая этой скорости в отдельные моменты). Даже если пассажир идет против движения вагона, все равно относительно неподвижного наблюдателя он смещается в ту сторону, куда идет вагон.

Аналогичное утверждение можно сформулировать для убывающих функций, если $b \le -|a|$.

Задача 11. *Найдите наибольшее значение функции* $y = 6x - 5\cos x + 4$ *на отрезке* $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Функция монотонно возрастает. Значит, наибольшее значение в правом конце отрезка. $y(0) = 6\cdot 0 - 5\cos 0 + 4 = -1$.

Задача 12. *Найдите наибольшее значение функции* $y = 10\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ *на отрезке* $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Заметим, что $\frac{36}{\pi} > 10$. Поэтому функция убывает. Значит, наибольшее значение в левом конце отрезка:

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -10\sin\frac{5\pi}{6} + \frac{36}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{6} + 7 = 32.$$

Утверждение 2. *Если* $a \ge b > 0$, *то функция* $f(x) = a\,\mathrm{tg}\,x - bx$ *возрастает на интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ *(и на любом другом интервале непрерывности тангенса; рис.7).*

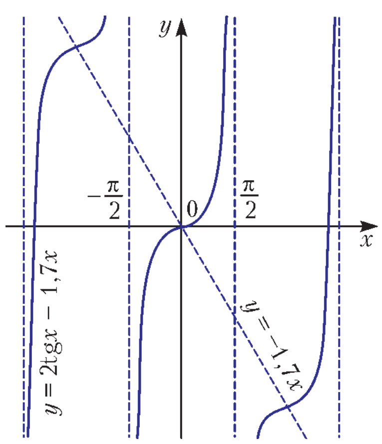


Рис. 7

Идея та же. Только теперь роль вагона играет слагаемое $a\,\mathrm{tg}x$, а пассажир bx теперь не мечется, а постоянно идет против движения вагона со скоростью b, но этого недостаточно – вагон быстрее.

Аналогичное утверждение можно сформулировать для убывающей функции

$$f(x) = -a\,\mathrm{tg}\,x + bx.$$

Задача 13. *Найдите наибольшее значение функции* $y = 3\,\mathrm{tg}\,x - 3x + 5$ *на отрезке* $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Функция на данном отрезке возрастает. Значит, наибольшее значение в правом конце отрезка: $y(0) = 5$.

Кратные нули

Задача 14. *Найдите точку максимума функции* $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

В этой задаче черный ход расположен в другом месте. Нам все равно, какую функцию изучать – данную или функцию

$$y = x^2(x-3).$$

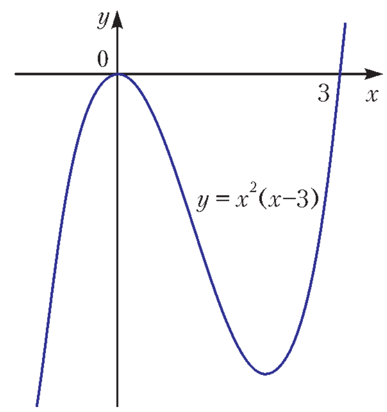


Рис. 8

А как устроена эта функция, легко разобраться. Она имеет нули в точках 0 и 3. Причем в точке 0 она обращается в нуль «целых два раза».[3] Поэтому в точке $x = 0$ график касается оси абсцисс. Схема графика (рис. 8) показывает, что $x = 0$ – единственная точка максимума. Точка минимума находится где-то между числами 0 и 3, но это нам неинтересно.

Задача 15. *Найдите наименьшее значение функции* $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ *на отрезке* $[0{,}5; 4]$.

Сначала кажется, что эта задача другая. Но... постойте:

$$y = (x-1)^2 x + 3.$$

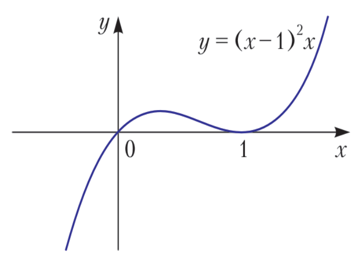


Рис. 9

Тройку отбросим. А с функцией $y = (x-1)^2 x$ все понятно – у нее кратный нуль в точке $x = 1$, в этой же точке единственный минимум (рис. 9). Значит, на отрезке $[0{,}5; 4]$ наименьшее значение равно нулю. А у данной функции, стало быть, наименьшее значение 3.

Задача 16. *Найдите точку минимума функции* $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$.

Попробуйте свести задачу к одной из предыдущих заменой $z = \sqrt{x}$.

Неравенство Коши

Трудно найти факт, который более нещадно эксплуатируется в занимательной и олимпиадной литературе по математике, чем неравенство Коши. Даже кинематограф (рис. 10) не остался равнодушен к неравенству

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab},$$

которое верно при всех $a, b \ge 0$ и обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = b$.

Неравенство Коши составной частью входит в более общую цепочку неравенств об алгебраических средних двух положи-

[3] Точку, в которой функция имеет нуль вместе со своей производной, называют кратным нулем (в данном случае нуль кратности 2).

Рис. 10. Кадр из фильма «Сердца четырех» (Мосфильм, 1941, режиссер Константин Юдин). Ст.лейтенант Колчин (П.Самойлов) только что к удовольствию и удивлению доцента Мурашовой (В.Серова) выяснил, что среднее арифметическое двух чисел больше, чем их среднее геометрическое. Только почему-то в фильме неравенство оказалось строгим и без ограничений на m и n. Отнесем это за счет особенностей художественного восприятия режиссера. Если вы вдруг незнакомы с этим неравенством, докажите его самостоятельно. В качестве подсказки вполне годится запись, кусочки которой видны за фигурами героев

тельных чисел

$$\min(a,b) \le \frac{2}{a^{-1}+b^{-1}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a;b),$$

которая тоже есть частный случай более общего факта. Эту цепочку для двух чисел можно доказать с помощью красивого геометрического построения в трапеции.[4] Для большего количества чисел доказательство требует других средств.

Задача 17. *Найдите точку минимума функции* $y = \frac{25}{x} + x + 25$ *при* $x > 0$.

Рассмотрим выражение $\frac{25}{x} + x$. При положительных x в силу неравенства Коши $\frac{25}{x} + x \ge 2\sqrt{25} = 10$. Равенство достигается только при $\frac{25}{x} = x$, т.е. при $x = 5$. Это и есть точка минимума.

Задача 18. *Найдите точку максимума функции* $y = \frac{x}{x^2 + 289}$ *при* $x > 0$.

При положительных x

$$\frac{x^2+289}{x} = x + \frac{289}{x} \ge 2\sqrt{289} = 34,$$

причем равенство возможно, только если $x = \frac{289}{x}$, т.е. если $x = 17$. В этой точке функция $y = \frac{x^2+289}{x}$ имеет минимум, а данная функция – максимум.

Задача 19. *Найдите наименьшее значение функции* $y = \frac{x^2+36}{x} - 5$ *на отрезке* $[1; 9]$.

При положительных x в силу неравенства Коши

$$\frac{x^2+36}{x} = \frac{36}{x} + x \ge 2\sqrt{36} = 12.$$

Равенство достигается при $\frac{36}{x} = x$, т.е. при $x = 6$. Значит, данная функция имеет наименьшее значение $12 - 5 = 7$.

Исследование под знаком монотонной функции

Метод состоит в том, чтобы отбросить внешнюю монотонную функцию и заняться только тем, что внутри. Метод настолько хорошо известен, что сперва я не хотел о нем даже упоминать. Потом подумал, что он хорошо известен как раз потому, что о нем часто рассказывают. Значит, нужно рассказать еще раз. Пусть будет известен еще лучше.

Утверждение 3. *Пусть функция* $y = f(x)$ *монотонно возрастает и определена на множестве значений функции* $y = g(x)$.

1. Если функция $g(x)$ *возрастает, то сложная функция* $y = f(g(x))$ *также возрастает,*

2. Если $g(x)$ *убывает, то функция* $y = f(g(x))$ *также убывает.*

Доказательство очевидно. Аналогичное утверждение получается, если внешняя функция $f(x)$ убывает.

Из утверждения 3 следует, что у функций $g(x)$ и $f(g(x))$ совпадают точки максимума и совпадают точки минимума (если они есть).

Задача 20. *Найдите точку максимума функции* $y = \sqrt{4 - 4x - x^2}$.

Корень – монотонно возрастающая функция. Точка максимума совпадает с точкой максимума функции $y = 4 - 4x - x^2$. Последняя функция – квадратичная, имеет единственный максимум в точке -2 и положительна в этой точке. Значит, данная функция тоже имеет единственный максимум в точке $x = -2$.

Задача 21. *Найдите наибольшее значение функции* $y = \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 6x + 10\right) + 2$.

Отбрасываем двойку. Затем удаляем логарифм – это функция убывающая. Остается квадратный трехчлен $y = x^2 - 6x + 10$, который имеет наименьшее значение в точке $x = 3$, равное $9 - 18 + 10 = 1$. Значит, наибольшее значение данной функции равно $\log_{\frac{1}{3}} 1 + 2 = 2$.

На этом мы, пожалуй, закончим обсуждать первую часть ЕГЭ и перейдем ко второй.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Вторая часть варианта ЕГЭ отличается от первой тем, что нужно не только найти ответ, но и записать полное обоснованное решение. Слова «полное и обоснованное» каждый человек трактует по-своему. На самом деле речь идет о записи решения, недвусмысленно дающей понять, как задача решена.

Решение должно быть записано последовательно, понятно и, желательно, без ошибок. Если записи не понятны эксперту или их логическая последовательность нарушена, то даже очень хорошее решение не будет оценено по достоинству – кто же в нем разберется? Главная добродетель на письменном экзамене – внятность и разборчивость записей. Не нужно применять значков, понятных только вам или вашему учителю. Не нужно жаргона.

Забудьте слово «оформление». Мы занимаемся не икебаной. Не нужно ничего оформлять. Решение нужно записать

---

[4] См., например, статьи: А.Савин, В.Сендеров. «Описанная трапеция и средние». – «Квант», 1972, №8; И.Ф.Шарыгин. «Трапеция». – «Квант», 1994, №5, задачи 16–18.

с начала и до конца хорошим русским языком. В решении задачи есть главный герой и есть второстепенные. Есть положительные и отрицательные персонажи, имеется сюжет, интрига и все прочие составляющие детектива. Вот и нужно написать короткий, но интересный детектив. Разгадка преступления – ответ – должна быть в конце.

Тексты решений задач, которые размещены ниже, могут дать представление о необходимом и достаточном уровне подробности записи решений.

В задачах части С тоже часто можно пользоваться непрямыми ходами, иногда значительно сокращающими решение и позволяющими обойтись без длинных выкладок.

С1 «Тригонометрическое уравнение»

Задача 22. *Решите уравнение* $2\cos^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1$.

Казалось бы, что проще? Уравнение сводится к квадратному, и дело в шляпе. Попробуем найти черный ход.

Перенесем единицу влево:

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Мы привели уравнение к виду $\cos a = \cos b$.

Утверждение 4. *Уравнение* $\cos a = \cos b$ *равносильно совокупности*

$$\left[\begin{array}{l} a = b + 2\pi k, \\ a = -b + 2\pi k, \end{array}\right. \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

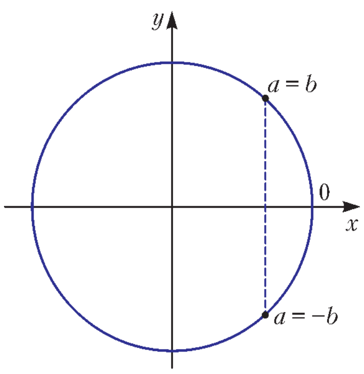


Рис. 11

Для доказательства достаточно рассмотреть числовую окружность (рис.11). Если у двух чисел косинусы равны, то эти числа попадают либо в одну и ту же точку, либо в точки, симметричные относительно оси абсцисс.

Продолжим прерванное решение.

Из уравнения

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

немедленно получаем

$$2x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \text{ или } 2x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

откуда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Нетрудно видеть, что вторая серия содержится в первой.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 23. *Решите уравнение*

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \cos x.$$

Преобразуем уравнение:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x;$$

$$-\cos 2x = \cos x;$$

$$\cos(2x + \pi) = \cos x.$$

Получаем: $2x + \pi = \pm x + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$$x = -\pi + 2\pi k \text{ или } x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Первая серия содержится во второй.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Разумеется, показанный прием служит лишь возможной альтернативой обычному способу решения. Иногда он лучше, иногда хуже традиционного метода. В любом случае второй способ позволяет сделать эффективную самопроверку.

Помимо уравнения $\cos a = \cos b$ не составит труда написать решение уравнений $\sin a = \sin b$ и $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b$. Сделайте это самостоятельно, и тогда у вас появятся еще два простых и полезных инструмента решения тригонометрических уравнений.

С2 «Углы и расстояния в пространстве»

Здесь мы рассмотрим два полезных метода – один для нахождения углов между плоскостями, а другой для нахождения расстояния от точки до плоскости. Нельзя сказать, что эти методы какие-то удивительные или малоизвестные. Вовсе нет, просто школьные учебники о них либо умалчивают, либо упоминают вскользь.

Косинус угла – это отношение двух площадей

Утверждение 5. *Если фигура* F *ненулевой площади*[5] *лежит в плоскости* α, *а* F' *– ее проекция на плоскость* β, *то отношение площадей* F' *и* F *равно косинусу угла между плоскостями* α *и* β *(рис. 12).*

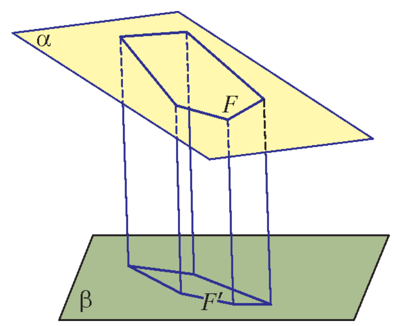


Рис. 12

Доказательство этого факта удобно проводить сначала для треугольника, сторона которого параллельна общей прямой плоскостей, затем для произвольного треугольника, затем для произвольного многоугольника разбиением на треугольники. Наконец, для произвольной фигуры доказательство производится предельным переходом от площадей вписанных многоугольников, когда наибольшая сторона вписанного многоугольника стремится к нулю.

Задача 24. *В кубе* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *точка* N *лежит на ребре* BB_1 *так, что* $B_1N : NB = 2:1$. *Найдите угол между плоскостью* ANC_1 *и плоскостью* ABC.

Можно решать задачу «как положено» с помощью линейного угла. Это довольно неудобно. Точно так же неудобно искать угол между перпендикулярами к плоскостям, поскольку положение перпендикуляра к плоскости ANC_1 неочевидно. Воспользуемся утверждением 5.

Построим треугольник ANC_1 и его проекцию ABC (рис. 13). Косинус искомого угла

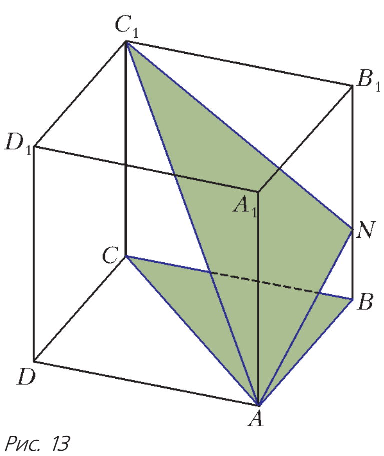


Рис. 13

[5] Чтобы не вдаваться в подробности, под фигурой, имеющей площадь, здесь удобно понимать часть плоскости, ограниченную линиями. Для такой фигуры площадь можно определить как точную верхнюю грань площадей вписанных многоугольников.

равен отношению их площадей:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ANC_1}}.$$

Удобно считать, что ребро куба равно 3. Несложно найти стороны треугольника ANC_1:

$$AN = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10},\quad NC_1 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13},\quad AC_1 = 3\sqrt{3}.$$

Чтобы найти площадь треугольника ANC_1, сначала найдем синус его угла, например, угла N:

$$\cos N = \frac{10+13-27}{2\sqrt{10}\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{130}}.$$

Тогда $\sin N = \sqrt{1-\frac{4}{130}} = \sqrt{\frac{126}{130}}$, и $S_{ANC_1} = \frac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{130}} = \frac{1}{2}\sqrt{126} = \frac{3}{2}\sqrt{14}.$

Площадь треугольника ABC равна $\frac{9}{2}$.

Тогда косинус искомого угла равен $\frac{9\cdot 2}{2\cdot 3\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Примечание. Площадь треугольника ANC_1 можно было найти по формуле Герона.

Расстояние иногда можно найти через объем пирамиды

Суть метода – представить искомое расстояние как высоту некоторой пирамиды, объем которой можно найти.

Задача 25. *В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M делит ребро BB_1 в отношении 2:1, считая от B_1, а точка N делит ребро CC_1 в отношении 2:1, считая от C. Найдите расстояние от точки C до плоскости AMN, если все ребра призмы равны 3.*

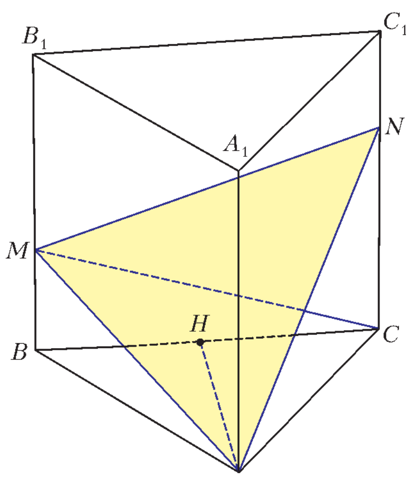


Рис. 14

Сделаем рисунок (рис.14) и рассмотрим треугольную пирамиду $MACN$. Ее объем V выразим двумя способами.

Пусть H – середина BC. Отрезок AH – высота пирамиды $MACN$. Поэтому

$$V = \frac{1}{3}S_{MCN}\cdot AH.$$

С другой стороны, $V = \frac{1}{3}S_{ANM}\rho$, где ρ – искомое расстояние. Из двух полученных равенств следует:

$$\rho = \frac{S_{MCN}\cdot AH}{S_{ANM}};\quad AH = \frac{3\sqrt{3}}{2},\quad S_{MCN} = \frac{1}{2}NC\cdot BC = 3.$$

Треугольник ANM равнобедренный: $AM = MN = \sqrt{10}$, $AN = \sqrt{13}$. Поэтому

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}AN\cdot\sqrt{AM^2-\frac{AN^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{39}}{4}.$$

Следовательно, $\rho = \frac{3\cdot 3\sqrt{3}\cdot 4}{2\cdot 3\sqrt{39}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$.

Ответ: $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

Мы опустим рассказ о том, как практически любую задачу про углы и расстояния в многогранниках можно решить с помощью векторной алгебры. Подробно об этом рассказано в разных статьях и книгах.[6]

Высота треугольной пирамиды с плоскими прямыми углами при вершине

Речь идет о треугольной пирамиде, у которой все три плоских угла при вершине прямые (рис. 15). Пусть боковые

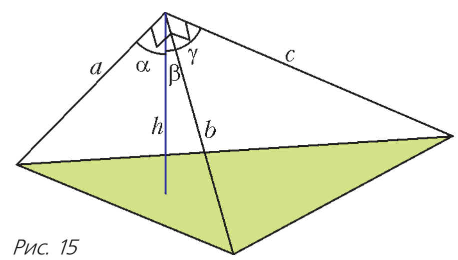


Рис. 15

ребра пирамиды равны a, b и c, высота равна h. Оказывается, в такой пирамиде легко связать высоту с боковыми ребрами.

Утверждение 6. $h = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$ *или, что то же самое,* $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Формула чем-то напоминает теорему Пифагора. Вероятно, с нее и нужно начать. Вернее, не с нее, а с основного тригонометрического тождества, которое, безусловно, тесно с нею связано. Обозначим углы, образованные боковыми ребрами и высотой, соответственно α, β и γ. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с диагональю h и ребрами a_1, b_1 и c_1, идущими соответственно вдоль ребер a, b и c пирамиды (рис. 16). Известно, что $a_1^2+b_1^2+c_1^2 = h^2$.

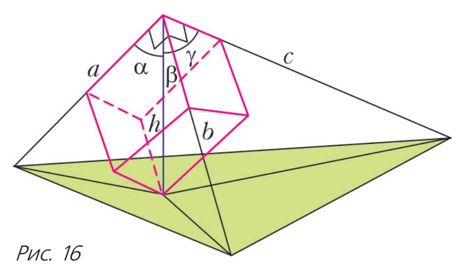


Рис. 16

Разделив обе части на h^2, получим: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$. Из этого равенства находим, что $\frac{h^2}{a^2}+\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2} = 1$.

Отсюда немедленно следуют нужные равенства.

Какую роль утверждение 6 может сыграть при решении других задач? Ведь такие необычные конфигурации авторами ЕГЭ не предлагаются. Дело в том, что в обычных для ЕГЭ задачах часто скрыта такая волшебная пирамидка.

Задача 26. *В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 3. Точка N лежит на ребре BB_1, так, что NB = 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости ANC_1.*

[6] См., например, книгу: С.А.Шестаков. «Векторы на экзаменах. Векторный метод в стереометрии». — М.: МЦНМО, 2005 и статью: Е.Потоскуев. «Векторный метод решения стереометрических задач». — Газета «Первое сентября», 2009, №6.

Продлим C_1N до пересечения P с ребром CB и рассмотрим треугольную пирамиду с основанием ANP и вершиной B (рис. 17). Все плоские углы у этой пирамиды прямые, а ее высота h – искомое расстояние.

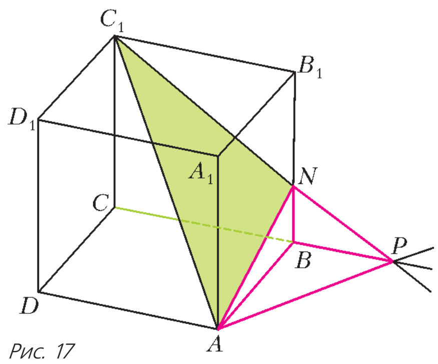


Рис. 17

В треугольной пирамиде с прямыми плоскими углами при вершине справедливо соотношение

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

между высотой h и боковыми ребрами a, b и c. Применим это равенство к пирамиде $BANP$. Получаем:

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BP^2} + \frac{1}{AB^2}}}.$$

По условию $BN = 1$ и $AB = 2$. Из подобия треугольников CC_1P и BNP следует, что $BP = 1$. Следовательно,

$$h = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \frac{1}{2^2}}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

В отличие от предыдущих утверждений утверждение 6 трудно счесть общеизвестным. Например, оно ни в каком виде не фигурирует в большинстве учебников (только иногда в качестве задачи). Возникает серьезный вопрос – нужно ли доказывать факты, которыми ты пользуешься на экзамене, и которые не входят в школьные учебники, как например, утверждение 6. Ответ такой: если автор решения на экзамене ссылается на такой факт, то нужно:

а) этот факт сформулировать в общем виде;

б) недвусмысленно написать ссылку на этот факт.

Например, в случае утверждения 6 кажется достаточным наличие текста, приведенного в решении. Еще лучше, если вы кратко дадите доказательство применяемого факта или хотя бы схему доказательства.

С3 «Логарифмические и показательные неравенства и их системы»

Редко у кого вызывают восторг преобразования логарифмов, хотя сами по себе они несложны. Авторы задач ЕГЭ также не любят длительные и запутанные трансформации. Поэтому вольно или невольно в задачи закладывается тот самый черный ход, о котором мы говорили раньше. Через него авторы задачи вышли. Можно ли через него войти? Отчего же нет. Количество разных хитростей велико, и не со всеми удастся познакомиться сразу. Но несколько вполне можно обсудить.

Утверждение 7. *Если* $a, b, c > 0$, *то неравенства* $\log_a b - \log_a c > 0$ *и* $\frac{b-c}{a-1} > 0$ *равносильны.*

Понятно, что знак неравенства может быть любым, знак «больше» взят только для примера.

Чтобы убедиться в равносильности, достаточно рассмотреть знаки левой и правой частей отдельно при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

В частности, равносильны неравенства $\log_a b > 0$ и $\frac{b-1}{a-1} > 0$ (конечно, если логарифм существует; и опять же, знак может быть любым).

Задача 27. *Решите неравенство*

$$\log_{5-x}^{-1}(x+1) - \log_{x+1}\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \ge 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{cases} \log_{x+1}(5-x) - \log_{x+1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \ge 0, \\ 5 - x \ne 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{x+1}(5-x) + \log_{x+1}(x-1) \ge 1, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

Далее:

$$\begin{cases} \log_{x+1}(5-x)(x-1) \ge \log_{x+1}(x+1), \\ x > 1, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

Пользуясь утверждением 7, получаем

$$\begin{cases} \frac{(5-x)(x-1)-(x+1)}{x+1-1} \ge 0, \\ x + 1 > 0, \\ (5-x)(x-1) > 0, \\ x > 1, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

Учитывая, что $x > 1$, упростим систему:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \le 0, \\ 1 < x < 5, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

Решение системы: $2 \le x \le 3$.

Ответ: $[2; 3]$.

Использование равносильности из утверждения 7 позволило избежать перебора случаев. Независимо от того, как основание расположено относительно единицы, мы получили равносильную систему рациональных неравенств, учитывающую оба случая.

Вот еще один несложный прием, иногда позволяющий значительно сократить выкладки.

Утверждение 8. *Верно тождество* $\log_c a \log_d b = \log_d a \log_c b$, *т.е. основания в произведении логарифмов можно менять местами.*

Доказательство занимает полстроки. Сделайте это самостоятельно.

Задача 28. *Решите неравенство*

$$\log_x(x+1)\log_{x+1}(x+2)\log_{x+2}(x+3) \ge 0.$$

Дважды последовательно применим равенство из утверждения 8. Получим $\log_{x+1}(x+1)\log_{x+2}(x+2)\log_x(x+3) \ge 0$. Первые два множителя равны 1. Получаем: $\log_x(x+3) \ge 0$. Убедитесь в том, что никакие дополнительные условия, которые можно было бы написать, на самом деле не нужны. Тогда при условии $x > 0$ получаем $\frac{x+3-1}{x-1} \ge 0$; $\frac{x+2}{x-1} \ge 0$; $x \le -2$ или $x > 1$.

Учитывая, что $x > 0$, находим решение неравенства: $(1; +\infty)$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Задача 29. *Решите систему неравенств*

$$\begin{cases} \log_{x+1} x - \log_x \left(x^3 + 2x^2 + x\right) \le 0, \\ 3^{3x-2} + \dfrac{1}{27^x} \le \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Преобразуем второе неравенство:

$$3^{3x-2} + \frac{1}{3^{3x}} \le \frac{2}{3}\ ;\ 3^{3x-1} + \frac{1}{3^{3x-1}} \le 2\ .$$

В силу неравенства Коши,

$$3^{3x-1} + \frac{1}{3^{3x-1}} \ge 2\sqrt{3^{3x-1} \cdot \frac{1}{3^{3x-1}}} = 2\ ,$$

причем равенство достигается, только если $3^{3x-1} = \frac{1}{3^{3x-1}}$, т.е. $3^{3x-1} = 1$. Получаем: $3x - 1 = 0$; $x = \frac{1}{3}$.

Вместо того, чтобы решать первое неравенство (что, кстати, можно сделать), подставим в его левую часть единственное возможное значение $x = \frac{1}{3}$ и проверим, подходит ли оно:

$$\log_{\frac{4}{3}} \frac{1}{3} - \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{27} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \right) = \log_{\frac{4}{3}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{27}{16}\ .$$

Дальше упрощать не нужно: оба слагаемых отрицательны.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Последняя задача – пример того, как решение одного из неравенств может оказать существенную помощь при решении второго, вплоть до полной отмены этого решения.

Разумеется, приведенные примеры не исчерпывают всех хитростей, которые можно применить при решении специально составленных неравенств. Можно было бы рассказать о приемах математического анализа, неравенстве треугольника, хитрых и неочевидных геометрических соображениях. Но все это значительно выходит за рамки обсуждаемой темы: **как сдать ЕГЭ.** Наша задача не в том, чтобы научиться составлять и решать хитрые задачи. Наша задача другая – научиться быстро и, возможно, необычным способом решить несложные задачи единого экзамена. Поэтому здесь и остановимся.

C5 «Задача с параметром»

Правильнее было бы назвать эту задачу «задача с геометрическим подтекстом», поскольку составление, а следовательно, и решение большинства заданий C5 единого экзамена подразумевает использование геометрических соображений. Широко применяются идеи симметрии, а также исследование взаимного расположения двух линий. Следующие две задачи иллюстрируют сказанное.

Задача 30. *Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} x^2 + 12x + |y| + 27 = 0, \\ x^2 + (y-a)(y+a) = -12(x+3) \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Можно ли решить эту задачу чисто алгебраически? Да, можно. Но не нужно. Гораздо симпатичнее посмотреть, как система интерпретируется на координатной плоскости.

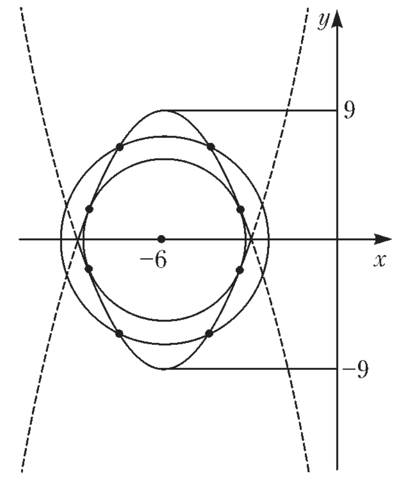


Рис. 18

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} |y| = 9 - (x+6)^2, \\ (x+6)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает объединение двух кусков парабол:

$$y = \begin{cases} 9 - (x+6)^2, & y \ge 0, \\ (x+6)^2 - 9, & y < 0 \end{cases}$$

(рис. 18). Второе уравнение задает окружность с радиусом $|a|$ и центром $(-6;0)$.

На рисунке видно, что четыре решения получаются в одном из двух случаев.

1. Окружность касается каждой из ветвей обеих парабол.

2. Окружность пересекает каждую из ветвей обеих парабол в двух точках, лежащих по разные стороны от оси абсцисс.

Составим уравнение для ординат общих точек окружности и параболы $y = 9 - (x+6)^2$. Получим $y = 9 - \left(a^2 - y^2\right)$, откуда $y^2 - y + \left(9 - a^2\right) = 0$. Чтобы окружность касалась парабол, уравнение должно иметь нулевой дискриминант: $1 + 4a^2 - 36 = 0$, откуда $a = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}$.

Во втором случае радиус окружности заключен между числами 3 и 9.

Ответ: $(-9;-3), -\frac{\sqrt{35}}{2}, \frac{\sqrt{35}}{2}, (3;9)$.

Задача 31. *Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение*

$$\left|y - x^2 + 4x - 5\right| + \left|y^2 - x^2 + 4x - 2ay + a^2 - 4\right| = 0$$

имеет ровно три различных решения.

Преобразуем уравнение:

$$\left|y - 1 - (x-2)^2\right| + \left|(y-a)^2 - (x-2)^2\right| = 0$$

и сделаем замену $x - 2 = z$:

$$\left|y - 1 - z^2\right| + \left|(y-a)^2 - z^2\right| = 0\ .$$

Если уравнение имеет решение $z = z_0,\ y = y_0$, то оно имеет симметричное решение $z = -z_0,\ y = y_0$. Значит, число решений может быть нечетным, только если в одном из решений $z = 0$. Подставим $z = 0$ в уравнение:

$$|y - 1| + (y-a)^2 = 0\ ,$$

откуда $y = 1$ и $a = 1$.

Единственное возможное значение a – единица. Проверим, правда ли при $a = 1$ уравнение имеет ровно три различных решения.

$$\left|y - z^2 - 1\right| + \left|(y-1)^2 - z^2\right| = 0\ ;$$

$$\begin{cases} y = z^2 + 1, \\ y = z + 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = z^2 + 1, \\ y = 1 - z. \end{cases}$$

Первая система имеет решения $z = 0$, $y = 1$ и $z = 1$, $y = 2$. Из второй системы получаем $z = 0$, $y = 1$ (это уже было) и новое решение $z = -1$, $y = 2$. Таким образом, при $a = 1$ действительно всего три различных решения.

Ответ: $a = 1$.

В этом решении задачи мы использовали алгебраическую симметрию. Эту же задачу можно решить геометрически. Вот как это можно сделать.

Введя новую переменную $z = x - 2$ и преобразовав уравнение к виду

$$\left|y - 1 - z^2\right| + \left|(y - a)^2 - z^2\right| = 0,$$

запишем равносильную систему

$$\begin{cases} y = z^2 + 1, \\ y = \pm z + a. \end{cases}$$

Первое уравнение в системе координат zOy задает параболу с вершиной $(0; 1)$, а второе – «косой крест», состоящий из двух перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке $(0; a)$ (рис. 19). Очевидно, три общие точки парабола и

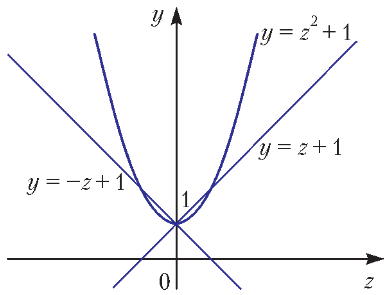


Рис. 19

крест имеют, только если центр креста совпадает вершиной параболы. Значит, $a = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Еще раз подчеркну главную мысль: ЕГЭ – это не контрольная работа с обязательным результатом и не олимпиада с нестандартными ключевыми идеями. ЕГЭ – тяжелая и важная работа, которую нужно сделать как можно лучше. Если в этой статье и рассматривались какие-то нестандартные методы решения задач, то лишь постольку, поскольку они позволяют быстро и эффективно решить стандартные задачи.

Для тренировки мы предлагаем порешать задачи из демонстрационных вариантов, составленных в соответствии со спецификацией ЕГЭ 2012 года. Некоторые из этих задач можно решить с «черного хода».

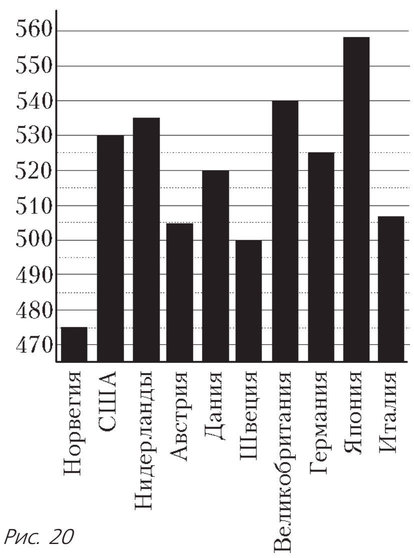


Рис. 20

Задачи для самостоятельного решения

Авторы задач: Р.К.Гордин, В.С.Панферов, И.Н.Сергеев, П.В.Семенов.

Задачи группы В

1. В летнем лагере 228 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 47 пассажиров. Сколько автобусов требуется, чтобы перевезти всех детей и воспитателей из лагеря в город?

2. На диаграмме (рис. 20) показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Найдите число стран, в которых средний балл ниже, чем 515.

3. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{см} \times 1 \text{см}$ (рис. 21). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

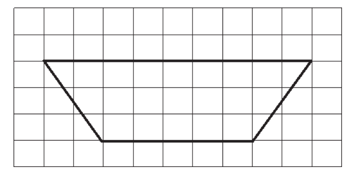


Рис. 21

4. На клетчатой бумаге нарисован круг, площадь которого равна 12 (рис. 22). Найдите площадь заштрихованной фигуры.

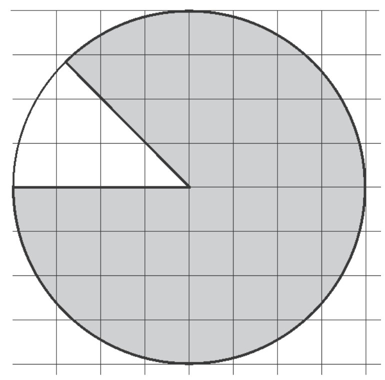


Рис. 22

5. В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года):

Наименование продукта	*Иркутск*	*Вологда*	*Тюмень*
Пшеничный хлеб (батон)	12	16	13
Молоко (1 литр)	25	25	25
Картофель (1 кг)	16	9	16
Сыр (1 кг)	220	240	260
Мясо (говядина)	300	280	285
Подсолнечное масло (1 литр)	65	65	65

В каком из этих городов была самой низкой стоимость набора продуктов: 3 л молока, 1 кг говядины, 1 л подсолнечного масла? В ответе запишите эту стоимость (в рублях).

6. Найдите корень уравнения $\log_3(7 - x) = 2$.

7. Найдите корень уравнения $\sqrt{79 - 3x} = 8$.

8. В треугольнике ABC угол C равен 74°, AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

9. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

10. Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой в течение 12 секунд. График на рисунке 23 показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M с

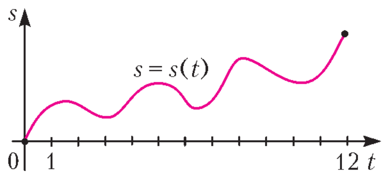


Рис. 23

течением времени. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

11. На рисунке 24 изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 5)$. По рисунку найдите точку минимума функции $f(x)$.

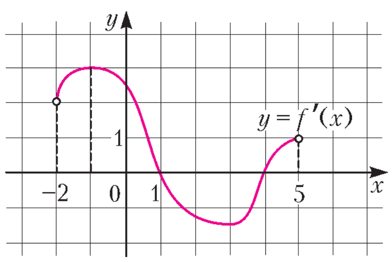


Рис. 24

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, $SO = 24$, $BD = 36$. Найдите боковое ребро SA.

13. В среднем из 50 аккумуляторов, поступивших в продажу, 7 неисправны. Найдите вероятность того, что один купленный аккумулятор окажется исправным.

14. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 2, а площадь поверхности равна 104.

15. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) – начальная масса изотопа, t (мин) – время, прошедшее от начального момента, T (мин) – период полураспада. В начальный момент масса изотопа $m_0 = 192$ мг. Период его полураспада $T = 10$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 6 мг?

16. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. За час автомобилист проезжает на 55 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 1 час 6 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

17. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 12x^2 + 36x + 11$ на отрезке $[4,5; 13]$.

18. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2-6x+8} + 3$.

Задачи группы С

19. Решите уравнение $4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

20. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 10, найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

21. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7\log_9\left(x^2 - x - 6\right) \le 8 + \log_9 \dfrac{(x+2)^2}{x-3}, \\ \dfrac{1}{3^{x-1}} + \dfrac{1}{3^x} + \dfrac{1}{3^{x+1}} < 52. \end{cases}$$

22. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно $\frac{15}{8}$.

23. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + \left|x^2 - 8x + 7\right|$ больше 1.

24. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \left(|x| - 9\right)^2 + (y-5)^2 = 9, \\ (x+3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

25. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

Удары

А.ЧЕРНОУЦАН

В этой статье будут рассмотрены задачи, где в результате кратковременного взаимодействия – удара или взрыва – скорости тел существенно изменяются, но их конечные скорости можно рассчитать из законов сохранения энергии и импульса, не вникая в детали самого процесса взаимодействия.

Отметим, что для изучения ударов *протяженных* тел необходимо использовать еще один закон сохранения – момента импульса, однако он выходит за рамки школьной программы и такие задачи не включаются ни в ЕГЭ, ни в олимпиады.

Задачи на удары появляются уже в теме «Кинематика» – это означает, что динамические соображения нужны лишь для корректной формулировки условия, а вся расчетная часть – чисто кинематическая.

Задача 1. *Мяч брошен горизонтально со скоростью $v_0 = 2$ м/с. Расстояние между двумя последовательными ударами мяча о горизонтальную поверхность равно $s = 4$ м. С какой высоты был брошен мяч? Удары о пол абсолютно упругие.*

Решение. Приведенная стандартная формулировка этой задачи не является полной с точки зрения динамики. Упругость взаимодействия мяча и пола означает лишь, что сохраняется вертикальная составляющая скорости: $v'_y = -v_y$, но для сохранения горизонтальной составляющей ($v'_x = v_x$) необходимо потребовать отсутствия трения. Впрочем, в рамках кинематики о таких тонкостях не задумываются, считая, что абсолютная упругость удара означает сохранение модулей скорости и ее обеих проекций (угол падения равен углу отражения). Тогда время между ударами равно $t_2 = s/v_0 = 2$ с, а время от момента броска до первого удара составляет $t_1 = t_2/2 = 1$ с. Для искомой высоты получаем

$$h = \frac{gt_1^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

В задачах на абсолютно неупругий удар (и в обратных задачах – о разделении одного тела на несколько частей) конечные скорости находятся с помощью закона сохранения импульса. Если движение происходит вдоль одной прямой, то векторный характер импульса проявляется в знаках проекций.

Задача 2. *Человек бежит навстречу тележке. Скорость человека $v_1 = 2$ м/с, скорость тележки $v_2 = 1$ м/с. Человек вскакивает на тележку и остается на ней. Какой будет скорость тележки после этого, если масса человека в 2 раза больше массы тележки?*

Решение. Выбирая положительное направление оси вдоль начальной скорости человека, запишем закон сохранения импульса в виде

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)u\ .$$

Учитывая, что $m_1 = 2m_2$, для искомой скорости получим

$$u = \frac{2v_1 - v_2}{3} = 1\ \text{м/с}\ .$$

Положительный знак ответа показывает, что конечная скорость направлена в положительном направлении, т.е. так же, как начальная скорость человека.

В задачах на неупругий удар может спрашиваться, какая часть энергии перешла из механической во внутреннюю (сколько «выделилось тепла») или даже, с учетом формул термодинамики, каково изменение температуры тел.

Задача 3. *Два одинаковых шарика, сделанных из вещества с удельной теплоемкостью $c = 450$ Дж/(кг·К), движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 40$ м/с и $v_2 = 20$ м/с. Определите, на сколько градусов они нагреются в результате неупругого столкновения.*

Решение. Запишем закон сохранения импульса:

$$mv_1 - mv_2 = 2mu\ ,$$

откуда выразим конечную скорость u, и закон сохранения энергии с учетом перехода механической энергии во внутреннюю:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{2mu^2}{2} + \Delta U\ .$$

Подставляя сюда формулу

$$\Delta U = c \cdot (2m) \cdot \Delta T\ ,$$

найдем

$$\Delta T = \frac{(v_1 + v_2)^2}{8c} = 1\ \text{К}.$$

Следующая задача показывает, как внимательно надо в некоторых случаях относиться к выбору системы отсчета.

Задача 4. *Пуля массой $m = 20$ г, летящая со скоростью $v_1 = 100$ м/с, застревает в деревянном шаре, летящем ей навстречу со скоростью $v_2 = 10$ м/с. Считая, что масса шара гораздо больше массы пули, найдите количество теплоты, выделившееся при ударе.*

Решение. На первый взгляд может показаться, что поскольку скорость шара почти не изменяется, то увеличение внутренней энергии равно уменьшению кинетической энергии пули. Однако это рассуждение приводит к явно бессмысленному ответу в случае, если скорость шара по модулю равна или больше скорости пули. В чем же дело? Оказывается, несмотря на малость изменения скорости шара Δv_2, пренебрегать изменением кинетической энергии шара можно только в системе отсчета, связанной с шаром. Действительно, в этой системе кинетическая энергия шара массой $M \gg m$ после удара, равная

$$E_2' = \frac{M(\Delta v_2)^2}{2} = \frac{M(mv_{\text{отн}}/M)^2}{2} = \frac{m}{M}\frac{mv_{\text{отн}}^2}{2} \ll \Delta E_1\ ,$$

пренебрежимо мала. Изменение скорости шара найдено из закона сохранения импульса, где $v_{\text{отн}}$ – начальная скорость пули в этой системе отсчета. Поскольку изменение скорости шара не зависит от системы отсчета, то изменение кинетической энергии шара в изначальной системе, равное

$$\Delta E_2 = \frac{M(v_2 + \Delta v_2)^2}{2} - \frac{Mv_2^2}{2} \approx Mv_2\Delta v_2 = mv_{\text{отн}}^2\ ,$$

сравнимо с изменением энергии пули. Записывая закон сохранения энергии в системе отсчета, связанной с шаром, найдем выделившееся количество теплоты:

$$Q = \Delta U = \frac{mv_{\text{отн}}^2}{2} = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{2} = 121\ \text{Дж}.$$

Если скорости взаимодействующих тел не параллельны друг другу, то векторный характер закона сохранения импульса проявляется в полной мере. Вот – пример.

Задача 5. *Между двумя пластилиновыми шариками, скорости которых взаимно перпендикулярны и равны $v_1 = 4v$ и $v_2 = 16v$, происходит абсолютно неупругое столкновение. Образовавшееся при столкновении составное тело имеет скорость $u = 5v$. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго.*

Решение. Запишем закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}\ .$$

Далее можно действовать одним из двух способов.

Первый способ назовем графическим. Изобразим векторное равенство в виде треугольника (рис.1) и запишем уравнение, связывающее его стороны (в общем случае запишем теорему косинусов, а в данном примере – теорему Пифагора):

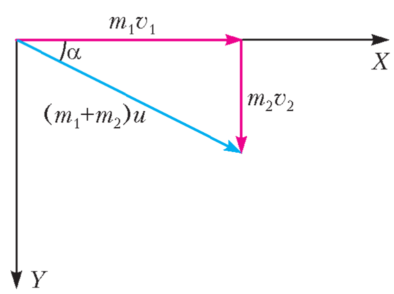


Рис. 1

$$m_1^2(4v)^2 + m_2^2(16v)^2 = (m_1 + m_2)^2(5v)^2\ .$$

Сократив v^2, приведя подобные члены и разделив на m_2^2, относительно $x = m_1/m_2$ получим уравнение

$$9x^2 + 50x - 231 = 0,$$

положительный корень которого $x = 3$.

Второй способ заключается в записи закона сохранения импульса в проекциях на оси. Направив ось X вдоль скорости первого шарика, ось Y – вдоль скорости второго (см. рис.1), получим два уравнения

$$m_1v_1 + 0 = (m_1 + m_2)u\cos\alpha,$$
$$0 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u\sin\alpha,$$

где α – угол между вектором $\vec{u}$ и осью X. Чтобы исключить угол α, воспользуемся основным тригонометрическим тождеством (возведем уравнения в квадрат и сложим), после чего придем к такому же уравнению, как и в первом подходе.

Замечание. Если в задаче о косом абсолютно неупругом ударе ставить вопрос о количестве выделившегося тепла, то надо обязательно оговаривать, что в системе отсчета, связанной с центром масс, удар является центральным. Иначе при ударе возникает вращение составного тела и часть энергии переходит в энергию вращательного движения.

В следующей задаче, хотя начальные скорости тел не параллельны друг другу, закон сохранения импульса можно записать в проекции только на одну ось.

Задача 6. *В ящик с песком массой $m_1 = 9$ кг, соскальзывающий с гладкой наклонной плоскости, попадает горизонтально летящее ядро массой $m_2 = 3$ кг и застревает в нем*

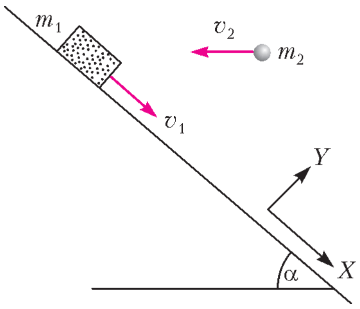


Рис. 2

(рис.2). Найдите скорость ящика сразу же после попадания ядра, если непосредственно перед попаданием скорость ящика $v_1 = 6$ м/с, а скорость ядра $v_2 = 12$ м/с. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60°$.

Решение. Из формулы для изменения импульса системы

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{внеш}\Delta t$$

следует, что если внешние силы перпендикулярны некоторой оси X, то их действие не изменяет проекцию импульса системы на эту ось. В данном примере внешними силами являются сила тяжести $m\vec{g}$ ($m = m_1 + m_2$) и сила нормальной реакции $\vec{N}$. Выбрать такую ось, которая была бы перпендикулярна обеим силам, не удается, поэтому задачу решают приближенно, в предположении малости времени соударения ($\Delta t \to 0$). Тогда, поскольку сила $m\vec{g}$ является фиксированной и не зависит от времени, $m\vec{g}\Delta t \to 0$, т.е. за время соударения сила тяжести дает ничтожно малый вклад в изменение импульса. Другое дело сила нормальной реакции, она относится к так называемым *ударным силам*, ее импульс $\vec{N}\Delta t$ остается конечным при любом сколь угодно малом Δt (ведь проекция импульса на перпендикулярную к плоскости ось Y все равно должна стать равной нулю). Так как проекция силы $\vec{N}$ на ось X, направленную вдоль плоскости, равна нулю, получим $\Delta p_x = mg_x\Delta t \approx 0$, т.е. проекция импульса системы на эту ось приближенно сохраняется:

$$m_1v_1 - m_2v_2\cos\alpha = (m_1 + m_2)u,$$

откуда $u = 3$ м/с.

Отметим, что взаимодействие ящика с плоскостью считается жестким (деформации пренебрежимо малы), но абсолютно неупругим, пластичным (импульс гасится без отрыва ящика от плоскости).

Продолжим разговор об ударных силах, а именно выясним, может ли быть ударной сила трения скольжения.

Задача 7. *В ящик с песком массой $m_1 = 8$ кг, скользящий по горизонтальной плоскости, падает с некоторой высоты груз массой $m_2 = 2$ кг. Непосредственно перед ударом скорость ящика $v_1 = 2$ м/с, скорость груза $v_2 = 10$ м/с. Найдите скорость ящика с грузом сразу после удара, если коэффициент трения между ящиком и горизонтальной поверхностью $\mu = 0,5$.*

Решение. Если бы трение отсутствовало, мы могли бы написать закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось X, поскольку внешние силы $\vec{N}$ и $m\vec{g}$ перпендикулярны этой оси. Однако сила трения направлена горизонтально, и ее импульсом $\vec{F}_{тр}\Delta t$ нельзя пренебречь даже в пределе $\Delta t \to 0$, т.е. сила трения в данном примере является ударной. Действительно, в каждый момент времени $F_{тр} = \mu N$, такое же соотношение связывает средние за время удара значения этих сил. Следовательно, $F_{тр}\Delta t = \mu N\Delta t$, а $N\Delta t$ остается конечным при $\Delta t \to 0$. Но эту задачу все-таки удается решить с помощью формулы для изменения импульса.

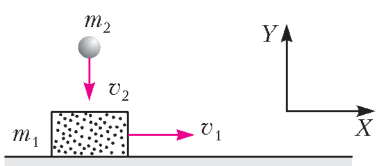


Рис. 3

Пренебрегая импульсом силы тяжести $m\vec{g}\Delta t$, запишем формулу для изменения импульса системы в проекциях на оси X и Y (рис.3):

$$-F_{тр}\Delta t = (m_1 + m_2)u - m_1v_1,$$

$$N\Delta t = 0 - (-m_2v_2).$$

Если скольжение продолжается все время удара (т.е. если $u > 0$), то выполняется соотношение

$$F_{тр}\Delta t = \mu N\Delta t.$$

Тогда получаем уравнение

$$m_1v_1 - (m_1 + m_2)u = \mu m_2v_2,$$

откуда находим

$$u = \frac{m_1v_1 - \mu m_2v_2}{m_1 + m_2} = 0,6 \text{ м/с}.$$

Возникает вопрос: если изменить численные данные так, чтобы скорость u получилась отрицательной (например, положить $v_2 = 20$ м/с), то ответ станет бессмысленным. В чем причина? Дело в том, что в уравнениях заложено предположение, что скольжение продолжается все время удара. Если же скорость ящика обратится в ноль до окончания удара, то сила трения станет равной нулю и скорость уже не изменится до окончания удара. Значит, если ответ получится отрицательным, то конечная скорость равна нулю, т.е. за время удара ящик остановится как вкопанный!

Рассмотрим теперь несколько задач, посвященных абсолютно упругому удару. Кинетическая энергия сталкивающихся тел в процессе удара частично переходит в энергию упругого взаимодействия, а после их разлета снова полностью переходит в кинетическую. Перехода механической энергии во внутреннюю при таком ударе не происходит. Строго говоря, малая часть энергии переходит в энергию упругих волн, возникших в сталкивающихся телах при ударе (см., например, статью А.Гросберга и М.Каганова «Вокруг шарика» в «Кванте» №2 за 1996 г.), но этим обычно пренебрегают.

Начнем с центрального удара шаров, при котором начальные скорости параллельны друг другу и проходят по линии центров шаров. В этом случае и конечные скорости шаров направлены параллельно линии центров, поэтому закон сохранения импульса можно записывать в проекции на одну ось.

Задача 8. *Шар массой $m_1 = 2$ кг, имеющий скорость $v_1 = 6$ м/с, сталкивается с неподвижным шаром массой $m_2 = 1$ кг. Найдите скорости шаров после удара, считая его центральным и абсолютно упругим.*

Решение. Запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в проекции на ось X, направленную вдоль начальной скорости первого шара:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$

$$m_1v_1 = m_1u_{1x} + m_2u_2$$

и сгруппируем члены так, чтобы все, что относится к первому телу, было слева от знака равенства:

$$m_1\left(v_1^2 - u_{1x}^2\right) = m_2u_2^2,$$

$$m_1(v_1 - u_{1x}) = m_2u_2.$$

Если мы поделим уравнения друг на друга, то получим простое уравнение

$$v_1 + u_{1x} = u_2, \qquad (1)$$

которое вместе с законом сохранения импульса образует систему двух *линейных* уравнений с двумя неизвестными. (При делении уравнений мы, с точки зрения математики, отбросили неинтересное для нас решение начальной системы уравнений: $u_{1x} = v_1$, $u_2 = 0$, соответствующее сохранению начальных скоростей, т.е. отсутствию удара.) Решив эту систему, получим

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \qquad (2)$$

Отметим, что: а) ответ зависит только от *отношения* масс шаров; б) если налетающий шар массивнее ($m_1/m_2 > 1$), то он после удара продолжает движение вперед, если легче – отскакивает назад, если той же массы – останавливается. Подставляя численные данные, находим

$$u_1 = u_{1x} = 2 \text{ м/с}, \quad u_2 = 8 \text{ м/с}.$$

Замечание 1. Задачу о центральном абсолютно упругом ударе двух шаров нетрудно решить и в более общем случае, когда ни один из шаров до удара не стоит на месте. Попробуйте проделать расчеты самостоятельно, действуя так же, как описано выше. Сгруппировав члены (слева – m_1, справа – m_2) и поделив уравнения почленно, получите уравнение

$$v_{1x} + u_{1x} = v_{2x} + u_{2x}. \qquad (3)$$

Решив систему линейных уравнений, получите ответ

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2x} + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

Эти формулы симметричны по отношению к замене индексов 1 и 2. В частном случае $v_2 = 0$ они переходят в формулы (2).

Замечание 2. Интересно понять физический смысл дополнительных уравнений (1) и (3), которые сильно облегчают решение задачи. Для этого перейдем в систему отсчета центра масс, в которой импульс системы равен нулю. Поскольку он должен остаться равным нулю и после удара, то легко угадать ответ, сохраняющий и энергию, и импульс: скорость каждого шара должна изменить направление на противоположное, не изменяя модуля. Значит, в системе центра масс относительная скорость двух шаров при ударе изменит свой знак, сохранившись по модулю. Но поскольку относительная скорость тел не зависит от системы отсчета, такое же утверждение является верным и в изначальной системе:

$$u_{2x} - u_{1x} = -(v_{2x} - v_{1x}).$$

Отметим, что, перейдя в систему центра масс, определив там конечные скорости и вернувшись обратно, можно почти устно найти конечные скорости. Например, в нашей задаче скорость центра масс равна $m_1 v_1/(m_1 + m_2) =$ 4 м/с, скорость второго шара в системе центра масс до удара –4 м/с, после удара 4 м/с, а относительно начальной системы отсчета скорость равна 4 м/с + 4 м/с = 8 м/с.

Замечание 3. Рассмотрим формулы (2) в интересном предельном случае $m_1 \gg m_2$, например для удара движущейся плиты по неподвижному упругому шарику, удару теннисной ракеткой по мячу при подаче, удару ногой по неподвижному футбольному мячу и т.д. В этом пределе получается $u_{1x} \approx v_1$, $u_2 \approx 2v_1$. Выражение для u_2 означает, что скорость мяча при подаче будет в два раза больше скорости ракетки (ноги, плиты). Этот интересный результат можно получить и без вычислений, перейдя на время, как в предыдущем замечании, в систему отсчета плиты (это в данном случае и есть система центра масс). В этой системе шарик движется со скоростью $-v_1$, ударяется о неподвижную плиту и отскакивает со скоростью v_1, а в изначальной системе его скорость равна $v_1 + v_1 = 2v_1$.

Рассмотрите самостоятельно удар движущейся со скоростью v_{1x} ракетки (плиты) и движущегося со скоростью v_{2x} мяча (шарика), используя оба подхода: предельный переход в формуле (4) и переход на время в систему отсчета ракетки (плиты). Ответ: $u_{2x} = -v_{2x} + 2v_{1x}$.

Для закрепления полученных сведений рассмотрим еще одну задачу на центральный абсолютно упругий удар.

Задача 9. *Один шар налетает на другой, большей массы, первоначально покоившийся. После центрального упругого удара скорость большего шара в 2 раза больше скорости меньшего шара. Найдите отношение масс шаров.*

Решение. Запишем законы сохранения энергии и импульса с учетом того, что налетающий шар имеет меньшую массу:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

$$m_1 v_1 = -m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Проделав стандартные действия (перенеся члены с m_1 налево и поделив уравнения почленно), получим уравнения

$$m_1 (v_1 + u_1) = m_2 u_2,$$

$$v_1 - u_1 = u_2,$$

$$u_2 = 2u_1.$$

Третье уравнение соответствует условию данной задачи. Важный момент состоит в том, что при записи этого соотношения можно не беспокоиться о знаках: поскольку направление скорости первого шара в законе сохранения импульса учтено в явном виде, то u_1 и u_2 положительны. Выражая из последних двух уравнений две любые скорости через третью (например, $u_2 = 2u_1$, $v_1 = 3u_1$) и подставляя в первое уравнение, получим $m_2/m_1 = 2$.

Уравнения центрального упругого удара могут возникать в задачах, где взаимодействие тел внешне не похоже на удар. Это происходит в тех случаях, когда механическая энергия сохраняется, причем как в начальном, так и в конечном состоянии потенциальная энергия равна нулю (точнее, одна и та же).

Задача 10. *Брусок массой m_1 скользит со скоростью v_1 по гладкой горизонтальной плоскости и наезжает на горку массой m_2 (рис.4). Высота горки в верхней точке h, подъем и спуск имеют плавные состыковки с плоскостью. Пренебрегая трением, найдите скорость бруска после того, как он спустится с горки обратно на плоскость.*

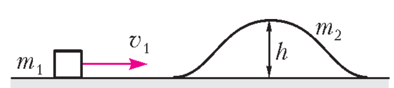


Рис. 4

Решение. Поскольку потенциальная энергия в конечном состоянии снова обращается в ноль, законы сохранения имеют точно такой же вид, как в задаче 8:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

$$m_1 v_1 = m_1 u_{1x} + m_2 u_2.$$

Однако решение (2) этой системы будет верно только в том случае, если брусок съедет назад, не доехав до вершины плоскости – только тогда $u_{1x} < u_2$ (как при ударе шаров). Если же, при v_1 больше некоторой пороговой скорости v_0, брусок переезжает горку и съезжает с другой стороны, то реализуется другое решение этой системы, которое мы отбросили в задаче 8: $u_{1x} = v_1,\ u_2 = 0$. Чтобы найти v_0, заметим, что при этой начальной скорости брусок добирается до верхней точки горки, но в этот момент его скорость относительно горки обращается в ноль, т.е. брусок и горка в этот момент имеют одинаковые скорости. Получаем

$$m_1v_0 = (m_1 + m_2)u,$$

$$\frac{m_1v_0^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} + m_1gh,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2gh\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)}.$$

Таким образом, при $v_1 < v_0$ скорость бруска будет равна $u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$, а при $v_1 > v_0$ скорость бруска составит $u_{1x} = v_1$.

Рассмотрим теперь несколько задач на нецентральный удар.

Задача 11. *Альфа-частица после абсолютно упругого столкновения с неподвижным ядром гелия движется в направлении, образующем некоторый угол с первоначальным направлением. Определите угол, под которым разлетаются частицы после столкновения.*

Решение. Так как альфа-частица – тоже ядро атома гелия (полученное при альфа-распаде), то надо рассмотреть упругий нецентральный удар двух одинаковых частиц. Законы сохранения для такого удара имеют вид

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2},$$

$$m\vec{v}_1 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2.$$

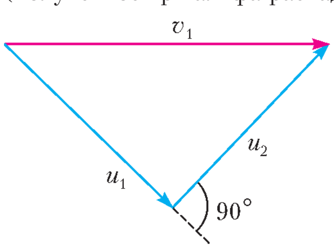


Рис. 5

Изобразим закон сохранения импульса (после сокращения массы m) на рисунке 5. Из закона сохранения энергии следует, что стороны треугольника скоростей подчиняются теореме Пифагора. Значит, угол между скоростями $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ равен $90°$. Такой же ответ верен для косого удара гладких шаров одинаковой массы.

Задача 12. *Шар массой $m_1 = 0,1$ кг налетает со скоростью $v_1 = 1,2$ м/с на покоящийся шар массой $m_2 = 0,3$ кг. Найдите скорость первоначально покоившегося шара после абсолютно упругого нецентрального удара, если направление скорости налетающего шара составляет угол $\alpha = 60°$ с линией центров шаров в момент удара. Поверхности шаров гладкие.*

Решение. Условие гладкости поверхности шаров является очень важным для решения задачи. В отсутствие силы трения единственная сила взаимодействия, возникающая при ударе, это сила нормальной реакции $\vec{N}$, действующая в точке соприкосновения шаров (рис.6). Эта сила направлена вдоль линии центра шаров и, следовательно, не вызывает их вращения – вся энергия после удара будет состоять из кинетической энергии поступательного движения. Кроме того, поскольку сила $\vec{N}$ – единственная сила, действующая на каждый из шаров, скорость покоившегося шара будет после удара направлена вдоль $\vec{N}$, т.е. вдоль линии центров. Следовательно, угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{u}_2$ равен $\alpha = 60°$.

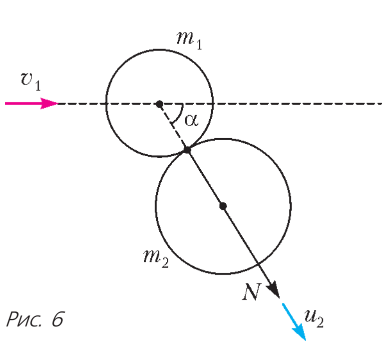


Рис. 6

Запишем закон сохранения импульса в векторном виде:

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

изобразим это равенство в виде треугольника (рис.7) и запишем для него теорему косинусов:

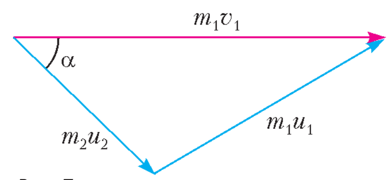


Рис. 7

$$m_1^2u_1^2 = m_1^2v_1^2 + m_2^2u_2^2 - 2(m_1v_1)(m_2u_2)\cos\alpha.$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$$

домножим на m_1 и сложим с предыдущим равенством (сократив двойки). После преобразований получим

$$u_2 = \frac{2m_1v_1\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 0,3 \text{ м/с}.$$

Отметим, что при $\alpha = 0$ этот результат переходит в ответ (2) для центрального удара.

Следующая задача еще раз демонстрирует преимущество системы отсчета центра масс.

Задача 13. *Нерелятивистский дейтрон упруго рассеивается на первоначально покоившемся протоне. Найдите максимальный угол отклонения дейтрона. (Масса дейтрона в два раза больше массы протона.)*

Решение. Центр масс системы движется со скоростью $v_ц = m_1v_1/(m_1 + m_2)$, а скорость дейтрона в системе центра масс равна $v_1' = v_1 - v_ц = m_2v_1/(m_1+m_2)$. Так как после удара импульс в этой системе остается равным нулю, скорости частиц $\vec{u}_1'$ и $\vec{u}_2'$ сохраняют свою величину: $u_1' = v_1',\ u_2' = v_2' = v_ц$ и направлены противоположно друг другу, но составляют произвольный угол от 0 до 180° (рис. 8) со скоростью $\vec{v}_1$.

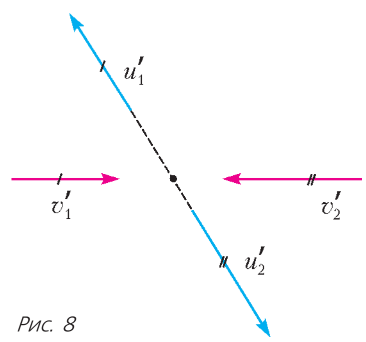


Рис. 8

Скорость относительно первоначальной системы отсчета находим по закону сложения скоростей: $\vec{u}_1 = \vec{v}_ц + \vec{u}_1'$ (рис. 9), причем $\vec{v}_ц$ – фиксированный вектор, а конец вектора $\vec{u}_1'$ описывает окружность с центром в конце вектора $\vec{v}_ц$. Наибольший угол отклонения соответствует касательной к окружности, откуда получаем

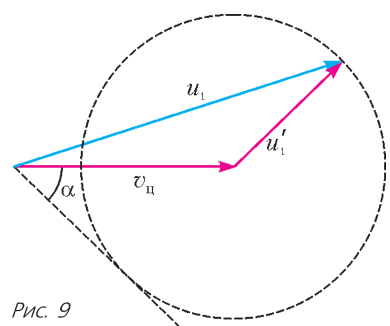


Рис. 9

$$\sin\alpha = \frac{v_1'}{v_ц} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \alpha = 30°.$$

В последней задаче мы познакомимся с частично неупругим ударом, при котором тела после удара движутся раздельно, но часть механической энергии переходит при ударе во внутреннюю энергию.

Задача 14. *В шар массой $M = 480$ г попадает пуля массой $m = 20$ г, летящая со скоростью $v_1 = 100$ м/с по линии, проходящей через центр шара. Считая, что сила сопротивления движению пули в материале шара постоянна и равна $F_c = 1650$ Н, найдите конечную скорость шара. Диаметр шара $d = 5$ см.*

Решение. Запишем для данного удара законы сохранения импульса и энергии (с учетом перехода механической энергии во внутреннюю за счет работы силы сопротивления):

$$mv_1 = mu_1 + Mu_2,$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} + \Delta U,$$

$$\Delta U = F_c d.$$

Исключая из этих уравнений конечную скорость пули $u_1 = v_1 - \frac{M}{m}u_2$, получим для скорости шара квадратное уравнение

$$\left(1 + \frac{M}{m}\right)u_2^2 - 2v_1u_2 + \frac{2F_cd}{M} = 0 .$$

Решение этого уравнения

$$u_2 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2F_cd\,(m+M)/(mM)}}{1 + M/m}$$

дает два положительных ответа: 2,5 м/с и 5,5 м/с. Какой из них выбрать? Многие школьники привыкли, что один из ответов обычно получается отрицательным, и заранее отбрасывают решение с минусом перед квадратным корнем. Другие не знают, что делать с двумя положительными корнями, и выбирают наибольший (и получают неверный ответ!). На самом деле надо вычислить скорость пули в каждом из случаев (не решая для u_1 квадратное уравнение, а используя написанную выше формулу, выражающую u_1 через u_2):

$$u_1 = v_1 - \frac{M}{m}u_2 = \frac{v_1 \mp (M/m)\sqrt{v_1^2 - 2F_cd\,(m+M)/(mM)}}{1 + M/m} .$$

Видно, что если выбрать верхние знаки в этих формулах («плюс» для шара и «минус» для пули), то скорость пули окажется *меньше*, чем скорость шара: $u_1 < u_2$ (в данном конкретном случае u_1 отрицательна и равна $u_1 = -32$ м/с). Значит, пуля в этом случае оказывается с той же стороны от шара, с которой она подлетала. Это соответствует отскоку пули при ударе назад с потерей энергии ΔU. Наоборот, если взять нижние знаки («минус» для шара и «плюс» для пули), то скорость пули оказывается *больше*, чем скорость шара (в данном конкретном случае она равна $u_1 = 40$ м/с), что соответствует ситуации, когда пуля пробивает шар насквозь и вылетает с другой стороны. Значит, правильный ответ для скорости шара соответствует *меньшему* корню: $u_2 = 2{,}5$ м/с.

Вопрос: а что будет, если дискриминант получится отрицательным? (*Ответ*: в этом случае пуля застрянет внутри шара.)

Упражнения

1. Пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, попадает в деревянный брусок массой 990 г, подвешенный на нити, и застревает в нем. На сколько градусов нагреется пуля, если на ее нагревание пошло 50% выделившегося количества теплоты? Удельная теплоемкость материала пули 200 Дж/(кг · К).

2 (ЕГЭ)**.** При спонтанном делении покоившегося ядра образовались три осколка массами $3m$, $4{,}5m$, $5m$. Скорости первых двух взаимно перпендикулярны, а их модули равны $4v$ и $2v$ соответственно. Модуль скорости третьего осколка равен :
1) v; 2) $2v$; 3) $3v$; 4) $6v$.

3. Снаряд, летящий с некоторой скоростью, распадается на два осколка. Скорость большего осколка по величине равна начальной скорости снаряда и направлена перпендикулярно ей. Скорость другого осколка по величине в 5 раз больше первоначальной. Найдите отношение масс осколков.

4. Граната, летевшая горизонтально со скоростью 20 м/с, разорвалась на две части. Скорость большего осколка равна 30 м/с и направлена под углом 60° к горизонту. Скорость меньшего осколка 60 м/с. Найдите отношение масс осколков.

5. Граната массой 1,2 кг, летевшая горизонтально со скоростью 20 м/с, разорвалась на две части. Скорость одного осколка массой 800 г равна 30 м/с и направлена под углом 60° к горизонту. Какая энергия выделилась при разрыве снаряда?

6. В ящик с песком массой 12 кг, соскальзывающий с гладкой наклонной плоскости, с высоты 3,2 м падает груз массой 4 кг и застревает в песке. Найдите скорость ящика сразу же после попадания груза, если непосредственно перед попаданием скорость ящика равнялась 8 м/с. Угол наклона плоскости к горизонту 30°.

7. Легкий шарик начинает свободно падать и, пролетев расстояние 1,25 м, сталкивается абсолютно упруго с тяжелой плитой, движущейся вверх со скоростью 2,5 м/с. На какую высоту подпрыгнет шарик после удара?

8. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров шар большей массы покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял 3/4 своей кинетической энергии. Во сколько раз масса одного шара больше, чем другого?

9. На гладком горизонтальном столе лежат один за другим три шара одно и того же радиуса, не касаясь друг друга: первый массой $2m$, второй массой m и третий массой $m/2$. Первому шару сообщают скорость 9 м/с, направленную по прямой, проходящей через центры всех трех шаров. Первый шар налетает на второй, а второй налетает на третий. Найдите скорость третьего шара после удара со вторым шаром. Все удары – абсолютно упругие.

10 (ЕГЭ)**.** Два шарика, массы которых отличаются в 3 раза, висят, соприкасаясь, на вертикальных нитях. Легкий шарик отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости. Каким будет отношение кинетических энергий тяжелого и легкого шариков тотчас после их абсолютно упругого центрального удара?

11. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 100 г и 400 г, соединенные недеформированной пружиной. Первому бруску сообщают скорость 10 м/с в направлении второго бруска. Найдите максимальную и минимальную скорости второго бруска в процессе дальнейшего движения.

12. Шар массой 3 кг, движущийся со скоростью v, налетает на покоящийся шар и после абсолютно упругого столкновения отскакивает от него под углом 90° к первоначальному направлению своего движения со скоростью $v/2$. Определите массу второго шара. Поверхности шаров гладкие.

13. Два шара массой 2 кг каждый покоятся на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь друг друга. Третий шар налетает на них, двигаясь по прямой, проходящей через точку касания неподвижных шаров и перпендикулярно линии, соединяющей их центры. Чему равна масса третьего шара, если после абсолютно упругого удара с неподвижными шарами он остановился? Все шары гладкие и имеют одинаковые радиусы.

14. В шар массой 480 г попадает пуля массой 20 г, летящая со скоростью 100 м/с по линии, проходящей через центр шара. После удара пуля отскакивает назад, причем при ударе выделяется 90 Дж тепла. Найдите конечную скорость шара.

XXXIII Турнир городов

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1(3)[1]. На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли точки P и Q такие, что $AQ = AC$, $BP = BC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника PQC, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

В.Произволов

2(4). Гости за круглым столом ели изюм из корзины с 2011 изюминками. Оказалось, что каждый съел либо вдвое больше, либо на 6 меньше изюминок, чем его сосед справа. Докажите что были съедены не все изюминки.

Д.Баранов

3(4). Из клетчатого прямоугольника 9×9 вырезали 16 клеток, у которых номера горизонталей и вертикалей четные. Разрежьте оставшуюся фигуру на несколько клетчатых прямоугольников так, чтобы среди них было как можно меньше квадратиков 1×1.

П.Кожевников

4(4). См. задачу М2248, *а*) «Задачника «Кванта».

5(5). По шоссе в одну сторону движутся пешеход и велосипедист, в другую сторону – телега и машина. Все участники движутся с постоянными скоростями (каждый со своей). Велосипедист сначала обогнал пешехода, потом через некоторое время встретил телегу, а потом еще через такое же время встретил машину. Машина сначала встретила велосипедиста, потом через некоторое время встретила пешехода и потом еще через такое же время обогнала телегу. Велосипедист обогнал пешехода в 10 ч, а пешеход встретил машину в 11 ч. Когда пешеход встретил телегу?

А.Шень

10–11 классы

1(3). См. задачу 2 для 8–9 классов.

2(4). В каждой клетке секретной таблицы $n\times n$ записана одна из цифр от 1 до 9. Из них получаются n-значные числа, записанные в строках слева направо и в столбцах сверху вниз. Петя хочет написать такое n-значное число без нулей в записи, чтобы ни это число, ни оно же, записанное задом наперед, не совпадали ни с одним из $2n$ чисел в строках и столбцах таблицы. В каком наименьшем количестве клеток Петя должен для этого узнать цифры?

Г.Гальперин

3(4). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны равны: $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$, $AD = 5$. Найдите угол между его диагоналями.

А.Толпыго

4(4). Натуральные числа $a < b < c$ таковы, что $b + a$ делится на $b - a$, а $c + b$ делится на $c - b$. Число a записывается 2011 цифрами, а число b записывается 2012 цифрами. Сколько цифр в числе c?

Б.Френкин

5(5). См. задачу М2249 «Задачника «Кванта».

[1] В скобках после номера каждой задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшееся за ее решение.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1(3). Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011?

А.Бердников

2(4). На стороне AB треугольника ABC взята точка P такая, что $AP = 2PB$, а на стороне AC – ее середина, точка Q. Известно, что $CP = 2PQ$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

В.Произволов

3(5). В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе.

А.Шаповалов

4(6). На клетчатой доске из 2012 строк и $k > 2$ столбцов в какой-то клетке самого левого столбца стоит фишка. Двое ходят по очереди, за ход можно передвинуть фишку вправо, вверх или вниз на одну клетку, при этом нельзя передвигать фишку на клетку, в которой она уже побывала. Игра заканчивается, как только один из игроков передвинет фишку в самый правый столбец. Но будет ли такой игрок выигравшим или проигравшим – сообщается игрокам только в тот момент, когда фишка попадает в предпоследний столбец (второй справа). Может ли один из игроков обеспечить себе выигрыш?

А.Бердников

5(6). Пусть $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$, $0 < a,b,c,d < 1$. Докажите, что $(a+b+c+d)-(a+c)(b+d) \geq 1$.

Г.Гальперин

6(7). См. задачу М2251 «Задачника «Кванта».

7(9). Вершины правильного 45-угольника раскрашены в три цвета, причем вершин каждого цвета поровну. Докажите, что можно выбрать по три вершины каждого цвета так, чтобы три треугольника, образованные выбранными одноцветными вершинами, были равны.

В.Брагин

10–11 классы

1(4). Петя отметил на плоскости несколько точек (больше двух), все расстояния между которыми различны. Пару отмеченных точек A, B назовем *необычной*, если A – самая дальняя от B отмеченная точка, а B – ближайшая к A отмеченная точка (не считая A). Какое наибольшее возможное количество необычных пар могло получиться у Пети?

Б.Френкин

2(4). См. задачу 5 для 8–9 классов.

3(5). См. задачу М2250 «Задачника «Кванта».

4. Существует ли выпуклый N-угольник, все стороны которого равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$, если: а)(3) $N = 2011$; б)(4) $N = 2012$?

И.Богданов

5(7). Назовем натуральное число *хорошим*, если все его цифры ненулевые. Хорошее число назовем *особым*, если в нем хотя бы k разрядов и цифры идут в порядке строгого возрастания (слева направо). Пусть имеется некое хорошее число. За ход разрешается приписать с любого края или вписать между любыми его двумя цифрами особое число или же, наоборот, стереть в его записи особое число. При каком наибольшем k можно из любого хорошего числа получить любое другое хорошее число с помощью таких ходов?

А.Бердников

6(7). См. задачу М2252 «Задачника «Кванта».

7(9). См. задачу М2253 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2011 г.)

1. Можно.

Например, $101001000100001 \times 11111 = 1122222112111111111$.

2. а) Диагональ AC делит пополам площадь прямоугольника $ABCD$ и делит пополам площадь каждого из белых прямоугольников. Значит, и синие прямоугольники равны по площади.

б) Да, обязательно.

Пусть X не лежит на диагонали AC, т.е. точки X, A и C образуют треугольник. Обозначим его площадь за s. Из условия следует, что площади четырехугольников $ABCX$ и $ADCX$ равны. Но одна из них на s больше половины площади BCD, а другая на s меньше (это легко увидеть, проведя диагональ AC) – противоречие.

3. 24.

Нам известны окончательные числа в трех клетках – назовем эти клетки «открытыми». Заметим, что каждый квадрат 2×2 внутри нашего прямоугольника содержит ровно одну «открытую» клетку. Тогда каждая операция увеличивает сумму чисел в «открытых» клетках ровно на 1. Сначала эта сумма была 0, а в конце 24. Значит, было сделано 24 операции.

4. Присвоим каждому отрезку простое число так, чтобы все числа были разные (это легко сделать, так как простых чисел бесконечно много). Теперь рядом с каждой точкой напишем произведение чисел, присвоенных выходящим из нее отрезкам. Убедитесь, что получится то, что требовалось.

5. а) Можно.

Разобьем лошадей на пять пятерок. Из первых пяти забегов выясним, кто быстрее в каждой пятерке. Затем возьмем из каждой пятерки победителя и устроим забег для них. После этого составим такую таблицу. В каждую строку запишем лошадей из одной пятерки – слева направо в порядке, в котором они финишировали в своем забеге. Сами строки упорядочим сверху вниз по итогам шестого забега.

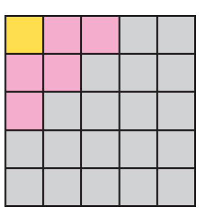


Рис. 1

А теперь посмотрите на рисунок 1. Лошадь на желтой клетке быстрее всех остальных. А у лошадей из серой области точно нет никаких шансов попасть в тройку быстрейших – для каждой из них есть не меньше трех лошадей, которые быстрее ее. Осталось устроить забег для лошадей из красной области, чтобы определить еще двух самых быстрых.

б) Не хватит.

Допустим, что хватит и шести забегов. До забегов про скорости лошадей ничего не известно, поэтому считаем, что все 25 лошадей потенциально быстрейшие. Каждый забег сокращает это число не более чем на четыре: лошади, пришедшие к финишу на местах со 2 по 5, не могут быть быстрейшими. Значит, перед шестым забегом есть не меньше 5 потенциально быстрейших лошадей и каждая из них должна соревноваться в последнем забеге, чтобы определилась тройка лидеров. Следовательно, после первых пяти забегов должно остаться ровно 5 возможных лидеров, а каждая из остальных 20 лошадей соревновалась только один раз. Пусть в последнем забеге первыми пришли лошади A, $Б$, $В$ (в таком порядке). Лошадь, которая финишировала вслед за A в одном из первых пяти забегов, соревновалась ровно один раз – в забеге с A, причем ни $Б$, ни $В$ в этом забеге не участвовали. Теоретически эта лошадь может оказаться в тройке сильнейших, но для проверки этого нам необходимо сравнить ее хотя бы с $Б$. Значит, шести забегов все-таки не хватит.

СТЕПЕНИ *n* И *n*-Е СТЕПЕНИ

1. Рассуждая как в доказательстве леммы 1, можно получить $x^{t-1} + x^{t-2}y + x^{t-3}y^2 + \ldots + xy^{t-2} + y^{t-1} \equiv ty^{t-1} \pmod m$.

2. Можно применить рассуждения из решения М2122,б), вместо леммы 1 ссылаясь на упражнение 1 и используя оценку

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right) \geq$$

$$\geq 2\left(3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1\right) = 3^n - 1 > n^2.$$

3. Если $m = \text{НОК}(a, b)$, то из условия следует, что $m \in A_1(2)$, откуда $m = 1$.

4. Если $a^n - b^n$ делится на n и $\text{НОД}(a-b, n) = 1$, то $\text{НОД}(a, n) = 1$ и $\text{НОД}(b, n) = 1$. Значит, ситуацию можно свести к рассмотренной ранее в задаче 1, подобрав такое натуральное c, что $bc \equiv 1 \pmod n$.

5. Можно применить идею решения задачи 2.

6. Достаточно положить $n = 2 \cdot 3^m$. Применяя LTE-лемму для $a = 2$, $b = -1$ (или просто применяя индукцию по m), можно доказать, что $2^{3^m} + 1$ делится на 3^m.

7. Предположим, что $\{a + nd \mid n \in \mathbb{N}\}$ – искомая прогрессия, причем можно считать, что $a > 0$. Будем брать простое p вида $1 + md$, $m \in \mathbb{N}$, такое, что $p > 2^a$ (таких p бесконечно много). Тогда $pa = a + (ma)d$, и $2^{pa} - 1 \equiv 2^a - 1 \not\equiv 0 \pmod p$, следовательно, $\text{НОД}\left(2^{pa} - 1, pa\right) \leq a$. Противоречие.

8. С помощью приема, который используется в упражнении 4, вопрос сводится к случаю $b = 1$, т.е. к леммам 5 и 6.

9. Можно положить $a = p^{k-1} + 1$, где p – нечетное простое. Тогда $p \in A_k(a)$. С другой стороны, если $n \in A_{k+1}(a)$ и $n > 1$, то, по задаче 1, n делится на p. Теперь можно прийти к противоречию, сравнивая $\nu_p\left(a^n - 1\right)$ и $\nu_p\left(n^{k+1}\right)$.

10. а) По задаче 2, если $n \in A_3(3)$, $n > 2$, то n делится на 4, $n = 4m$. Но делимость $81^m - 1$ на $2^6 m^3$ противоречит лемме 6. б) Рассуждения ведутся по той же схеме. Как и в решении задачи 2, получаем, что если $n \in A_3(5)$, $n > 1$, то n четно, $n = 2t$. Имеем: $25^t - 1$ делится на $2^3 t^3$. Если $t > 1$, то, как следует из задачи 1, t четно или t делится на 3 (так как $25-1=24$ имеет 2 различных простых делителя: 2 и 3). В первом случае получается противоречие лемме 6, а во втором – противоречие лемме 5 для p = 3.

11. Достаточно решить задачу для нечетного простого p. Можно положить $b = p + 1$, $a = b^p$ и $n \in A_2(b)$. Тогда $b^n - 1$ делится на n^2 и, следовательно, $a^n - 1$ делится на pn^2. Но, по задаче 1, n делится на p, поэтому n^3 тоже делится на pn^2.

12. Если $a \neq 2^k - 1$, то степени нечетного простого делителя $a + 1$ принадлежат $A_1^+(a)$. Если a – любое нечетное, большее 1 (в частности, если $a = 2^k - 1$, $k > 1$), то $a^2 + 1$ делится на 2, но не делится на 4; значит, можно воспользоваться предыдущим утверждением для a^2. Таким образом, при любом нечетном $a > 1$ множество $A_1^+(a)$ содержит бесконечно много чисел вида $2m$, где m нечетно.

13. Предположение, что $n > 1$ нечетно, противоречит утверждению задачи 1 для $a = 1 - 2^k$.

14. Из упражнения 13 следует, что если $a = 2^k - 1$, $n \in A_2^+(a)$, $n > 1$, то n четно. Но тогда $a^n + 1$ не делится на 4 – противоречие. Если $a \neq 2^k - 1$, то $A_2^+(a)$ содержит нечетный простой делитель a + 1. Аналогично, для б) достаточно взять нечетный простой делитель $a^2 + 1$ (т.е. простое $p \in A_2^+(a^2)$).

15. Как и в решении М2212, можно продолжать цепочку чисел из $A_2^+(a)$. Для этого может быть полезна следующая оценка: при $x \geq 3$, $n \geq 3$ выполнено $\dfrac{x^n + 1}{x + 1} > n$. В задаче б) достаточно строить цепочку нечетных чисел из $A_2^+(a^2)$.

16. Можно двигаться по схеме решения задачи 4, используя следующий аналог леммы 4. Пусть $a \geq 2$, p – нечетное простое число, и выполнено хотя бы одно из двух условий $a \neq 2$, $p \neq 3$. Тогда число $s = a^{p-1} - a^{p-2} + \ldots + a^2 - a + 1$ имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем a + 1.

17. Можно строить решение так же, как и в задаче 2 (так как n, очевидно, нечетно, можно воспользоваться утверждением задачи 1 для $a = -2$).

18. Решение следует из упражнения 17.

19. а) Из условия следует, что a и b нечетные, поэтому $2^m + 1$ делится на m, где $m = \text{НОК}(a, b)$. Согласно упражнению 17, m делится на 9, значит, одно из чисел a, b (скажем, a) делится на 9. Нетрудно видеть, что если $2^b + 1$ делится на 9, то b делится на 3.

б) Пусть (a, b), где $a > b$, – пара, удовлетворяющая условию. Согласно а), можно считать, что $\nu_3(a) \leq 2$, $\nu_3(b) \geq 1$. Из этой пары можно получить новую пару (a, bp), где $p > 3$ – простой делитель числа $\dfrac{2^a + 1}{b}$ (такое p найдется, так как $\nu_3\left(\dfrac{2^a+1}{b}\right) \leq 2$, но $\dfrac{2^a+1}{b} > \dfrac{2^a+1}{a} > 9$).

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Сопротивление тела птицы много больше сопротивления параллельного ей участка провода между ее ногами, поэтому сила тока в теле птицы мала и безвредна.

2. Палец имеет очень большое сопротивление по сравнению с сопротивлением лампочки. При «включении» его последовательно с лампочками через палец и лампочки течет один и тот же ток, поэтому падение напряжения на пальце будет значительно больше падения напряжения на лампочках, т.е. практически все напряжение сети будет приложено к пальцу.

3. Проводник *3* обладает наибольшим сопротивлением, проводник *2* – наименьшим.

4. $R_{\text{общ}} = R = 1$ Ом.

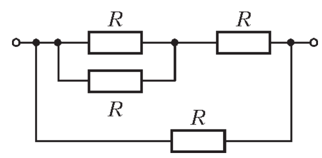


Рис. 2

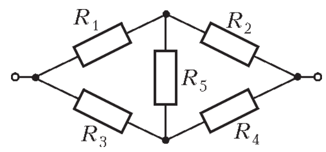


Рис. 3

5. При последовательном соединении пяти проводников сопротивление каждого проводника равно R = 1 Ом. Возможно и другое решение: проводники соединены параллельно между собой в 2 группы, в одной из которых 3 проводника, в другой – 2, и эти группы соединены друг с другом последовательно. Тогда R = 6 Ом.

6. Четыре резистора; см. рис.2.

7. На рисунке 3 представлена так называемая мостиковая схема, когда токи протекают по всем резисторам.

8. После добавления двух проводников цепь примет вид, изображенный на рисунке 4; ее сопротивление равно $3r$. Так как исходное сопротивление цепи было равно $5r$, то сопротивление цепи уменьшится в $5/3$ раза.

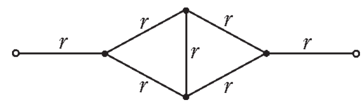


Рис. 4

9. В обоих случаях ток, текущий через вольтметр, должен быть одним и тем же. Из этого следует, что во втором случае ток в цепи в два раза меньше, чем в первом. А это выполняется, если сопротивление каждого резистора равно $R = R_V = 3$ кОм.

10. При отсутствии тока через резистор сопротивлением R_1 напряжение на резисторе сопротивлением R_3 должно быть равно U_1. Тогда $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$.

11. Перемычку сопротивлением r, лежащую на оси симметрии точек A и B, можно удалить, так как через нее ток не потечет. Тогда схема превращается в две параллельные цепочки сопротивлением $\dfrac{7}{3}r$ каждая, а сопротивление всей «звезды» будет равно $\dfrac{7}{6}r$.

12. Через ребра AB, BC, CD, DE, EF и FA, опоясывающие весь куб (рис.5), пройдет суммарный ток $I = \dfrac{42\text{ В}}{7\text{ Ом}} = 6$ А. Поскольку эти ребра расположены симметрично, то силы токов, протекающих через них, одинаковы. Значит, искомая сила тока равна $I_{AB} = \dfrac{I}{6} = 1$ А.

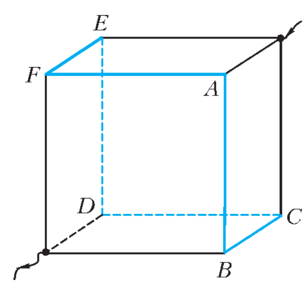


Рис. 5

13. Распределение токов по сторонам ячейки представлено на рисунке 6; полный ток равен $I_{AB} = \dfrac{7}{2}i$; полное сопротивление равно $R_{AB} = \dfrac{12}{7}r$.

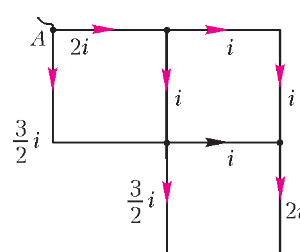


Рис. 6

14. В силу симметрии, ток по участкам CD и EF не течет. Поэтому сопротивление между выводами A и B будет равно R.

15. В одном проводнике ток уменьшится, а в другом может как уменьшиться, так и увеличиться. Например, если первое сопротивление увеличить значительно, а второе – незначительно, то ток во втором проводнике увеличится, а не уменьшится.

Микроопыт

Сначала потребуются источник тока, реостат, вольтметр и амперметр. Собрав электрическую цепь с последовательно включенным в нее мотком проволоки, следует измерить силу тока и падение напряжения в нем, а затем по закону Ома определить сопротивление проволоки R. Также необходимо замерить, например штангенциркулем, диаметр проволоки d и найти в таблице значение удельного сопротивления меди ρ.

Расчет длины проволоки l производится по формуле $R = \frac{\rho l}{S}$, откуда

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{R\left(\pi d^2/4\right)}{\rho} = \frac{R\pi d^2}{4\rho}.$$

УДАРЫ

1. $\Delta T = 1$ К. **2.** Верен ответ 3). **3.** 3. **4.** 2.
5. $\Delta U = 840$ кДж. **6.** $u_1 = 7$ м/с. **7.** $h = 5$ м. **8.** 3.
9. $u_3 = 16$ м/с. **10.** $\frac{E_1}{E_2} = 3$.
11. $u_{2\max} = 4$ м/с, $u_{2\min} = 0$. **12.** $m_2 = 5$ кг. **13.** $m_3 = 3$ кг.
14. $u_1 = 5$ м/с.

XXXIII ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. Треугольник BPC – равнобедренный, поэтому биссектриса угла B совпадает с серединным перпендикуляром к стороне CP. Аналогично, биссектриса угла A совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку CQ. Но центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на пересечении упомянутых биссектрис, а центр описанной окружности треугольника PQC – на пересечении упомянутых серединных перпендикуляров.

2. Левый сосед того, кто съел меньше всех, съел вдвое больше, т.е. четное число изюминок. Тогда его левый сосед тоже съел четное число изюминок. Обойдя круг, видим, что все съели по четному числу изюминок. Значит, всего съедено четное число изюминок. Но число 2011 нечетно, значит, хотя бы одна изюминка осталась.

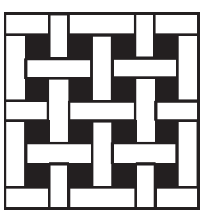


Рис. 7

3. На рисунке 7 приведено разрезание, где квадратиков 1×1 нет вовсе.

5. В 10:40.

Нарисуем графики движения и отметим их точки пересечения. Пусть обгонам и встречам велосипедиста соответствуют точки A, L, C, машины – точки C, K, B, а встреча телеги с пешеходом – точке M (рис.8). По условию, L и K, соответственно, середины сторон AC и BC треугольника ABC, откуда M – точка пересечения его медиан. Точка M делит медиану AK в отношении 2:1, поэтому и проекция точки M делит временной отрезок от 10 до 11 часов в том же отношении. Значит, встреча произошла в 10:40.

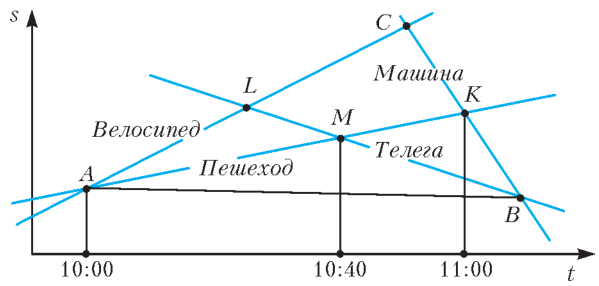


Рис. 8

10–11 классы

2. В n клетках.

Если проверено менее n клеток, то в какой-то из строк проверенных клеток нет, и там может оказаться любое число. Пусть Петя проверил n клеток по диагонали, на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами. Тогда Пете достаточно предъявить число-палиндром, у которого на i-м и $(n-i+1)$-м местах стоит одна и та же цифра, отличающаяся от цифр в проверенных клетках i-й и $(n-i+1)$-й строк. Такое число будет отличаться от числа в k-й строке или столбце как раз k-й цифрой.

3. 90°.

Нетрудно убедиться, что $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$. Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника, а угол AOB равен α. Выразив входящие в равенство квадраты сторон по теореме косинусов для треугольников AOB, BOC, COD и DOA, после сокращений получим

$$-\cos\alpha\left(OA\cdot OB + OC\cdot OD\right) = \cos\alpha\left(OA\cdot OD + OC\cdot OB\right),$$

что возможно только при $\cos\alpha = 0$.

4. 2012.

По условию число $2a = (b+a)-(b-a)$ делится на $b-a$. Значит, $b - a \le 2a$, т.е. $b \le 3a$. Аналогично, $c \le 3b$. Значит, $c \le 9a < 10a$, поэтому в записи c не более 2012 цифр (но и не меньше, так как $c > b$).

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. При любом.

Прибавляя по N, получим $2011N$. Отнимая по 2011, получим 2011.

2. Отложим на продолжении стороны AB отрезок $BD = PB$. Тогда PQ – средняя линия треугольника ACD. Следовательно, $CD = 2PQ = CP$, т.е. треугольник PCD – равнобедренный, CB – его медиана, а значит, и высота, т.е. угол B прямой.

3. 6 гирь.

Указание. Упорядочим гири по возрастанию веса. Чтобы уравновесить пару самых тяжелых гирь, надо не менее трех гирь, значит, всего гирь не менее 5. Пусть гирь ровно пять: $\Gamma_1 < \Gamma_2 < \Gamma_3 < \Gamma_4 < \Gamma_5$. Как $\Gamma_3 + \Gamma_5$, так и $\Gamma_4 + \Gamma_5$ можно уравновесить только всеми остальными. Значит, веса этих пар равны половине общего веса гирь и равны между собой, что противоречит условию $\Gamma_3 < \Gamma_4$.

Убедитесь, что 6 гирь с целыми весами от 3 до 8 подходят.

4. Это может сделать первый игрок.

Первый может заставить второго переместить фишку во 2-й (слева) столбец. Для этого он определяет, где – выше или ниже исходной клетки – в первом столбце осталось нечетное число свободных клеток (такое направление найдется, потому что 2011 – число свободных клеток – нечетно). После этого он делает ход в «нечетном» направлении. Если второй упорно сопротивляется переходу во 2-й столбец, то ему придется продолжать идти в этом направлении. Но ход в крайнюю

клетку сделает первый, и второму все равно придется перейти во 2-й столбец.
Аналогично, первый игрок заставляет второго перейти в 3-й, 4-й, ..., предпоследний столбец. Если при этом он узнает, что перейти в последний столбец выгодно, он туда и идет. В противном случае он, как и раньше, заставляет перейти туда второго игрока.
5. По условию, произведение чисел ac и bd равно произведению чисел $(1-a)(1-c)$ и $(1-b)(1-d)$. Поэтому либо $ac \ge (1-a)(1-c)$ и $bd \le (1-b)(1-d)$, либо $ac \le (1-a)(1-c)$ и $bd \ge (1-b)(1-d)$. Разберем первый случай (второй аналогичен). Раскрыв скобки и приведя подобные, имеем $1-(a+c) \le 0$ и $1-(b+d) \ge 0$. Перемножив левые части, получим отрицательное число:

$$1-(a+c)-(b+d)+(a+c)(b+d) \le 0 .$$

Последнее неравенство равносильно тому, что надо доказать.
7. Пусть цвета синий, красный, желтый. Нарисуем черный 45-угольник на прозрачной пленке и наложим его на исходный. Назовем это положением C. Обведем на пленке кружками 15 синих вершин. Поворачивая пленку каждый раз на угол $360° : 45 = 8°$, совмещаем вершины на пленке с вершинами исходного треугольника и считаем количество кружков, содержащих красные вершины. В среднем за полный оборот это количество равно $15 \cdot 15 : 45 = 5$. Так как в положении C таких кружков $0 < 5$, то в некотором положении $К$ «красных» кружков не менее шести. Оставим на пленке только эти шесть кружков вершин. Аналогично найдем положение пленки $Ж$, где в эти 6 кружков попало более двух (т.е. не менее трех) желтых вершин. Сотрем все кружки кроме этих трех. Они и дадут нам три равных треугольника: в положении $Ж$ – желтый, в положении $К$ – красный, в положении C – синий.

10–11 классы

1. Одна пара.
Пусть (A, B) – необычная пара I. Тогда $BK < AB < AK$ для любой отмеченной точки K. Это значит, в частности, что пары (A, K) и (K, A) – обычные (K и A – не ближайшие друг к другу). Пары (K, B) и (B, K) – обычные (K и B – не самые дальние друг от друга). Допустим, что еще какие-то две точки C, D образуют необычную пару II. Выпишем цепочку неравенств, помечая каждое номером необычной пары, из-за которой оно выполнено: $AB \underset{\mathrm{I}}{>} BC \underset{\mathrm{II}}{>} CD \underset{\mathrm{II}}{>} AD \underset{\mathrm{I}}{>} AB$ – противоречие.
Пример с одной необычной парой (A, B) – вершины треугольника ABC, где $AC > AB > BC$.
4. а) Существует; б) не существует.
а) Пусть O – вершина параболы. Отложим на правой ветви 1005 равных хорд $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{1004}A_{1005}$ длины t. Рассмотрим ломаную $OB_1B_2\ldots B_{1005}$, симметричную $OA_1A_2\ldots A_{1005}$ относительно оси параболы. Очевидно, длина $l(t)$ отрезка $B_{1005}A_{1005}$ непрерывно зависит от t. При $t = \sqrt{2}$ имеем $B_1A_1 = 2 > t$, тем более $l(t) > t$. При $t = 4020$ ордината точки A_{1005} меньше $1005 \cdot 4020$, значит, ее абсцисса меньше $\sqrt{1005 \cdot 4020} = 2010$, и $l(t) < 2 \cdot 2010 = t$. По теореме о промежуточном значении, найдется значение, при котором $l(t) = t$. В этом случае многоугольник $OA_1A_2\ldots A_{1005}B_{1005}\ldots$ $\ldots B_1$ – равносторонний.
б) **Лемма.** *Если в выпуклом четырехугольнике две противоположные стороны равны, то в другой паре противоположных сторон меньше та, сумма углов при которой больше.*
Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ сумма углов A и B больше $180°$ и $AD = BC$. Построим параллелограмм $ABCE$. Треугольник CAD получается из треугольника CAE увеличением угла A, поэтому $CD > CE = AB$.

Следствие. *Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в параболу, $AD = BC$, а точки A и B лежат на дуге CD параболы. Тогда $CD > AB$.*
Доказательство. Ясно, что четырехугольник $ABCD$ – часть сегмента параболы, отсеченного хордой CD. Пусть касательные к параболе в точках C и D пересекаются в точке M. Треугольник CMD содержит упомянутый сегмент, а, значит, и четырехугольник $ABCD$. Поэтому

$$\angle BCD + \angle ADC < \angle MCD + \angle MDC < 180° .$$

Решение задачи. Пусть нашелся такой 2012-угольник. Занумеруем его вершины в порядке возрастания абсцисс от A_1 до A_{2012} (в этом же порядке они будут появляться при обходе 2012-угольника против часовой стрелки). Применяя 1005 раз вышеприведенное следствие, последовательно получим $A_1A_{2012} > A_2A_{2011} > \ldots > A_{1006}A_{1007}$. Противоречие.
5. При $k = 8$.
Очевидно, в особом числе не более 9 цифр. Если $k = 9$, то при каждой операции число цифр меняется ровно на 9, т.е. остаток от деления на 9 числа его цифр не меняется, и из однозначного числа нельзя сделать двузначное.
Пусть $k = 8$. Поскольку все операции обратимы, то достаточно доказать, что можно вставить любую цифру. Докажем индукцией по n, что можно вставить цифру n.
База. Чтобы вставить 1, вставим сначала 123456789, а затем вычеркнем 23456789.
Шаг индукции. Пусть умеем вставлять (и вычеркивать) цифры от 1 до $n-1 < 9$. Чтобы вставить n, вставим сначала 123456789, сотрем $12\ldots(n-1)$ по одной цифре, затем по одной цифре вставим $12\ldots(n-1)$ справа от n и, наконец, вычеркнем число $12\ldots(n-1)(n+1)\ldots9$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473
Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №
Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: math@kvantjournal.ru, phys@kvantjournal.ru
Сайт: kvantjournal.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

Десятый король

Не успели мы подвести юбилейные итоги прошлого года, как подоспела еще одна дата: 30 января 2012 года исполнилось 75 лет выдающемуся гроссмейстеру, десятому шахматному королю Борису Спасскому. Его шедевры отличаются изяществом и четкостью, это настоящие математические этюды. Посмотрите четыре эффектные партии Спасского и убедитесь в этом сами.

Б. Спасский – Е. Геллер

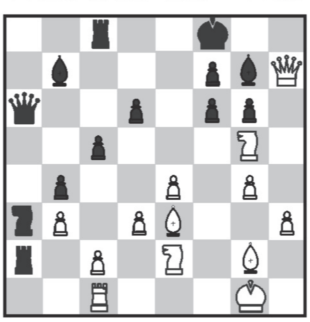
Сухуми, 1968

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘c3 d6 3. g3 ♘c6 4. ♗g2 g6 5. d3 ♗g7 6. f4. Спасский часто применял закрытый вариант сицилианской защиты, причем на самом высоком уровне. Вот и этот претендентский матч был выигран им прежде всего благодаря этому варианту. Последним ходом белые показывают, что собираются атаковать неприятельского короля.

6...♘f6 7. ♘f3 0-0 8. 0-0 ♖b8 9. h3 b5 10. a3 a5 11. ♗e3 b4 12. ab ab 13. ♘e2 ♗b7 14. b3 ♖a8 15. ♖c1 ♖a2 16. g4 ♕a8 17. ♕e1 ♕a6 18. ♕f2 ♘a7 19. f5! ♘b5 20. fg hg 21. ♘g5 ♘a3 22. ♕h4 ♖c8. Есть такой красивый финал: 22...♖e8 23. e5! de 24. ♖:f6! ef 25. ♕h7+ ♔f8 26. ♗:c5+ ♖e7 27. ♗:e7+ ♔:e7 28. ♕:g7 fg 29. ♕:e5+ с победой.

23. ♖:f6! ef 24. ♕h7+ ♔f8.



25. ♘:f7! Еще одна эффектная жертва, окончательно разрушающая укрепления черного короля. **25...♖:c2 26. ♗h6 ♖:c1+ 27. ♘:c1 ♔:f7 28. ♕:g7+ ♔e8.** Не спасает 28...♔e6 29. g5 fg 30. ♗:g5 ♖e8 31. ♕:g6+.

29. g5 f5 30. ♕:g6+ ♔d7 31. ♕f7+ ♔c6 32. ef+. Черные сдались.

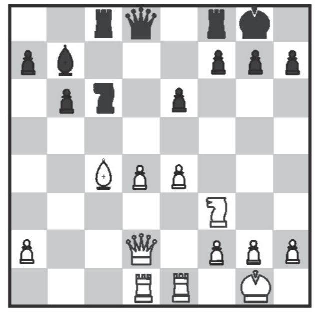
Б. Спасский – Т. Петросян

Матч на первенство мира

Москва, 1969

Ферзевый гамбит

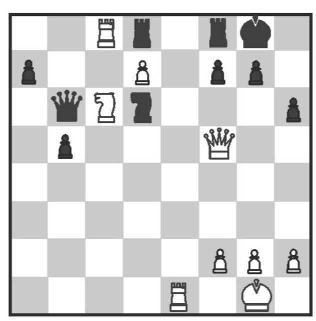
1. c4 ♘f6 2. ♘c3 e6 3. ♘f3 d5 4. d4 c5 5. cd ♘:d5 6. e4 ♘:c3 7. bc cd 8. cd ♗b4+ 9. ♗d2 ♗:d2+ 10. ♕:d2 0-0 11. ♗c4 ♘c6 12. 0-0 b6 13. ♖ad1 ♗b7 14. ♖fe1 ♖c8.



15. d5! Прорыв, который тщательно исследовался три десятка лет назад. **15...ed.** В случае 15...♘a5 16. ♗d3 ed 17. e5! у белых за пешку весьма опасная инициатива.

16. ♗:d5 ♘a5 17. ♕f4 ♕c7 18. ♕f5 ♗:d5 19. ed ♕c2 20. ♕f4. Вряд ли черные устояли бы и в эндшпиле – 20. ♕:c2 ♖:c2 21. ♖e7 ♖:a2 22. ♖:a7 ♖c2 23. d6.

20...♕:a2 21. d6 ♖cd8 22. d7! ♕c4 23. ♕f5 h6 24. ♖c1 ♕a6 25. ♖c7 b5 26. ♘d4 ♕b6 27. ♖c8 ♘b7 28. ♘c6 ♘d6.



29. ♘:d8! Эффектный финал. **29...♘:f5 30. ♘c6. Черные сдались.**

Б. Спасский – Т. Петросян

Матч на первенство мира

Москва, 1969

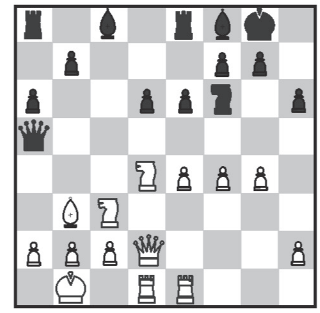
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘:d4 ♘f6 5. ♘c3 a6 6. ♗g5 ♘bd7 7. ♗c4 ♕a5 8. ♕d2 h6 9. ♗:f6 ♘:f6 10. 0-0-0 e6 11. ♖he1 ♗e7? Ввиду ожидаемого g2-g4-g5 черным следовало отказаться от короткой рокировки и посредством 11...♗d7 подготовить длинную.

12. f4 0-0 13. ♗b3 ♖e8 14. ♔b1 ♗f8 15. g4!

15...♘:g4. Черные могли не принимать жертву, но все равно не устояли бы. **16. ♕g2 ♘f6 17. ♖g1 ♗d7 18. f5! ♔h8.** Упорнее 18...ef 19. ef b5 20. ♕g6 ♔h8 21. ♗:f7 b4 с контригрой.

19. ♖df1 ♕d8? Теперь атака развивается сама собой. **20. fe fe 21. e5! ...de 22. ♘e4! ♘h5.** На 22...♘:e4



решает 23. ♖:f8+, а на 23...ed – 23. ♖:f6. **23. ♕g6!** Атака завершается тихим ходом. **23...ed 24. ♘g5. Черные сдались.**

Б. Ларсен – Б. Спасский

Белград, 1970

Английское начало

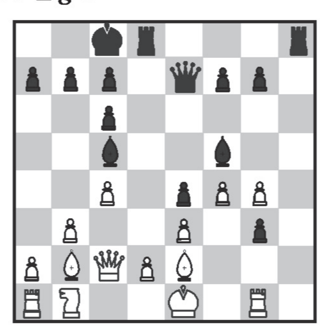
Несмотря на скоротечность поединка победа Спасского в «матче века» (сборная СССР – сборная мира) относится к числу весьма ярких произведений в духе шахматных романтиков прошлого.

1. b3 e5 2. ♗b2 ♘c6 3. c4 ♘f6 4. ♘f3 e4 5. ♘d4 ♗c5! 6. ♘:c6 dc 7. e3 ♗f5 8. ♕c2 ♕e7 9. ♗e2 0-0-0 10. f4? Спокойнее было 10. ♗:f6 ♕:f6 11. ♘c3 или сразу 10. ♘c3.

10...♘g4! 11. g3. В случае 11. ♘c3 решало 11...♖:d2! 12. ♕:d2: ♗e3. Короткая рокировка тоже крайне опасна – 11. 0-0 ♕h4 12. h3 h5 и 13...♕g3.

11...h5! 12. h3. На 12. ♘c3 вновь следовал удар 12...♖:d2! 13. ♕:d2 ♗:e3 14. ♕c2 ♗f2+ 15. ♔f1 ♘e3+.

12...h4! Красивая жертва коня, над белым королем сгущаются тучи. **13. hg hg 14. ♖g1.**



14...♖h1! Этот удивительный маневр ладьей сочетает сразу два тактических приема – отвлечение (ладьи от пешки «g») и завлечение (той же ладьи под удар той же пешки).

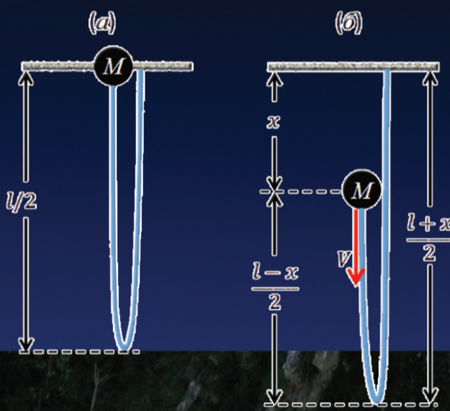
15. ♖:h1 g2 16. ♖f1.

16...♕h4+! 17. ♔d1 gf♕+. Белые сдались. Возможен такой финал: 18. ♗:f1 ♗:g4+ 19. ♔c1 ♕e1+ 20. ♕d1 ♕:d1×.

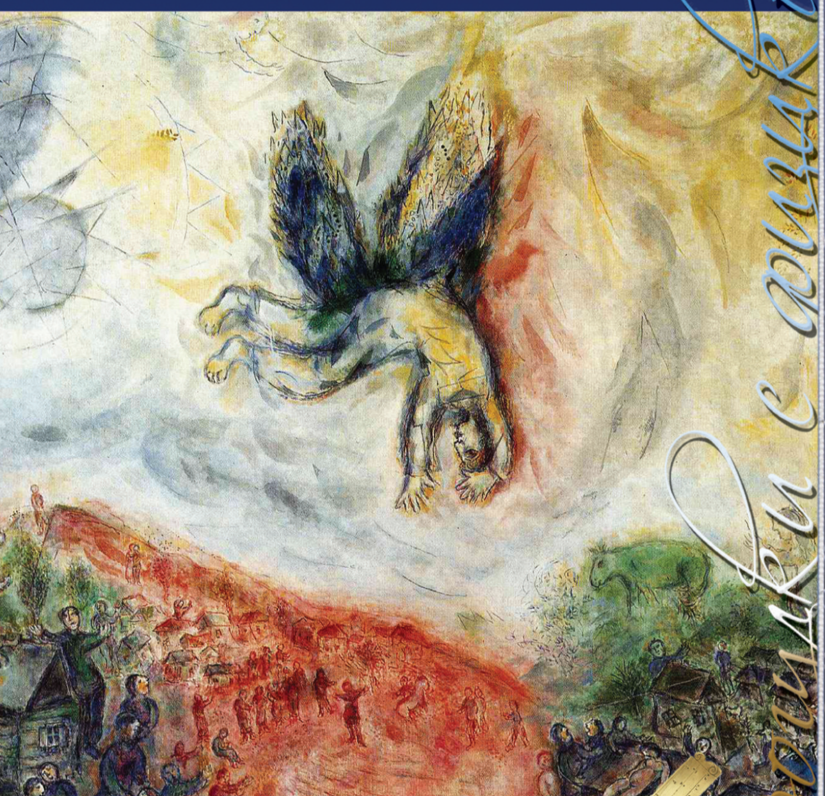
Е.Гик

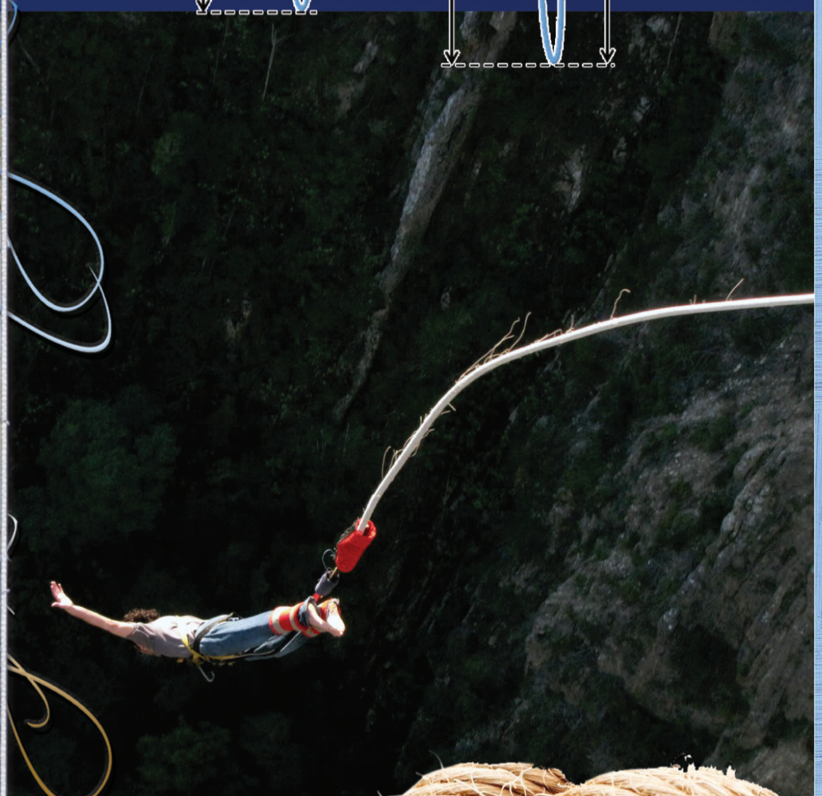
Как быстрее падать?

Оказывается, чтобы падать с ускорением, большим, чем ускорение свободного падения, надо привязать себя длинным тяжелым канатом или цепью...



Прогулки с физикой





(Продолжение – на странице 16 внутри журнала)